

九州大学 正真 山崎徳也

〃 正真 寿坂 照

〃 学生員 〇羽根浩朗

1, 緒言

プレキャストPC桁と現場打ちスラブを組み合わせたPC合成桁は、コンクリートの引張応力の減少とそれに伴う断面の有効利用により、極めて経済性の高い構造型式であることは周知のとおりである。PC合成桁の応力状態は、プレキャストPC桁のプレストレス、自重および載荷荷重などによるコンクリートのクリープと乾燥収縮の影響を複雑に受けて変化するため、その厳密な解析は極めて困難である。そこで本論においては、乾燥収縮の影響をひとまず無視し、かつコンクリートの弾性係数を時間的に変化しない定数として取り扱うことにより理論式を簡略化し、先に発表した文献(1)の結果と合せてプレストレス導入後のPC合成桁の全クリープ挙動を明らかにせんとするものである。

2, コンクリートの応力-ひずみ関係式

いま、コンクリートの材令が t_1 のプレキャストPC桁にプレストレスを導入し、さらに $t = t_2$ においてコンクリートスラブを現場打ちするものとする。 $t_1 \leq t \leq t_2$ におけるPC桁の応力とひずみを $\bar{\sigma}_p(t)$ 、 $\bar{\epsilon}_p(t)$ 、 $t_2 \leq t$ におけるそれらを $\tilde{\sigma}_p(t)$ 、 $\tilde{\epsilon}_p(t)$ とし、また現場打ちコンクリートの応力とひずみを $\bar{\sigma}_c(t)$ 、 $\bar{\epsilon}_c(t)$ とすれば文献(1)により次の関係式が成立する。

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad \bar{\epsilon}_p(t) = \frac{\bar{\sigma}_p(t)}{E_p} - \int_{t_1}^t \bar{\sigma}_p(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_p(t, \tau) d\tau \quad (1)$$

$$t_2 \leq t \quad \tilde{\epsilon}_p(t) = \frac{\tilde{\sigma}_p(t)}{E_p} - \int_{t_2}^t \tilde{\sigma}_p(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_p(t, \tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \bar{\sigma}_p(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_p(t, \tau) d\tau \quad (2)_a$$

$$\bar{\epsilon}_c(t) = \frac{\bar{\sigma}_c(t)}{E_c} - \int_{t_2}^t \bar{\sigma}_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C_c(t, \tau) d\tau \quad (2)_b$$

ここに E_p, E_c : それぞれPC桁および現場打ちコンクリートの弾性係数

$C_p(t, \tau), C_c(t, \tau)$: それぞれPC桁および現場打ちコンクリートのクリープ関数(時刻 t から時刻 τ までに生じるクリープひずみ)

で次式の内容をもつ。

$$C_p(t, \tau) = p(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad , \quad p(\tau) = A_1/\tau + C_1 \quad (3)_a$$

$$C_c(t, \tau) = \gamma(\tau) [1 - e^{-\beta(t-\tau)}] \quad , \quad \gamma(\tau) = A_2/\tau + C_2 \quad (3)_b$$

ただし $\alpha, A_1, C_1, \beta, A_2, C_2$ は実験により定められる定数

式(2)_a, (2)_bをそれぞれ $\bar{\sigma}_p(t)$ 、 $\bar{\sigma}_c(t)$ について解けば次の応力-ひずみ関係式がえられる。

$$\bar{\sigma}_p(t) = \bar{\sigma}_p(t_2) + \int_{t_2}^t \left[\bar{\sigma}_p(\tau) + \int_{t_2}^{\tau} E_p \{ \dot{\bar{\epsilon}}_p(\tau) + \alpha \dot{\bar{\epsilon}}_c(\tau) \} d\tau \right] d\tau \quad (4)_a$$

$$\bar{\sigma}_c(t) = \bar{\sigma}_c(t_2) + \int_{t_2}^t \left[\bar{\sigma}_c(\tau) + \int_{t_2}^{\tau} E_c \{ \dot{\bar{\epsilon}}_c(\tau) + \beta \dot{\bar{\epsilon}}_p(\tau) \} d\tau \right] d\tau \quad (4)_b$$

$$\therefore \text{ここに} \quad \bar{\epsilon}_p(\tau) = \int_{t_2}^{\tau} \alpha [1 + E_p p(\tau)] d\tau \quad \bar{\epsilon}_c(\tau) = \int_{t_2}^{\tau} \beta [1 + E_c \gamma(\tau)] d\tau$$

3, 変形の微分方程式の誘導

図-1のごとくPC合成桁の左端に原点をとり、現場打ちスラブの断面の図心軸に沿ってX軸、垂直下方にZ軸をそれぞれ設ける。PC鋼材の断面積を A_s とし、軸方向圧縮力はPC桁の図心 P の下方距離 a の位置に作用するものと仮定する。現場打ちコンクリートの図心 C と P の距離を a とすれば、先ず $t_1 \leq t \leq t_2$ の任意時刻 t における鋼材の引張力 $\bar{P}(t)$ が文献(2)より次式で与えられる。

$$\bar{P}(t) = \bar{P}(t_1) \left\{ 1 - J \mu \bar{m} E_p E_f e^{\frac{\mu \bar{m}}{E_p}} \int_{t_1}^t \frac{e^{-\mu \bar{m}}}{\bar{m}} d\tau \right\}$$

ここに $J = \frac{P R (1 + \bar{R})}{P R (1 + \bar{R}) + \bar{R}}$, $\mu = \alpha (1 + J E_p C)$, $\bar{m} = J \delta E_p A_s$, $P = \frac{A_s}{A_p}$
 $\alpha = \frac{E_p}{E_c}$, $\bar{R} = \left(\frac{E_p}{E_c} \right)^2$, $\bar{f} = \frac{\bar{f}_p}{\bar{f}_c}$

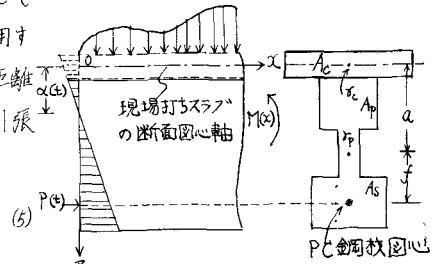


図-1

ただし A_p : PC桁のコンクリートの断面積 E_p , 鋼材の弾性係数 E_f , PC桁のコンクリートの弾性係数 $\bar{f}_p$; PC桁の図心軸に関するPC桁の断面二次モーメント

次に $t \geq t_2$ における鋼線のひずみ $\varepsilon_s(t)$ としかつ鋼材とコンクリートが一体となって変形するものとすれば、式(2)_kのひずみとの間に次の関係が成立する。

$$\Delta + \varepsilon_p(t) = \varepsilon_s(t) \quad (6)$$

PC合成桁と同一断面をもつ、軸方向力の作用しない仮想断面の中立軸と C との距離を $\alpha(t)$ とし、またPC合成桁のZ方向のたわみを $w(t)$ とすれば、PC桁および現場打ちスラブの任意 x のひずみはそれぞれ次式で表わされる。

$$\varepsilon_p(t) = \varepsilon_{co}(t) - \frac{x}{f} \omega(t) + \frac{x-a}{f} \bar{\omega}(t) \quad (7)_k$$

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{co}(t) - \frac{x}{f} \omega(t) \quad (7)_c$$

$$\text{ただし } \varepsilon_{co}(t) = \alpha(t) \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}(t)}{\partial x^2} \right\}, \quad \omega(t) = f \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}(t)}{\partial x^2} \right\} \quad (8)_k, (8)_c$$

$\bar{\varepsilon}_{po}(t)$: スラブ打設前のPC桁の軸方向ひずみ, $\bar{\omega}(t) = f \frac{\partial^2 \bar{w}(t)}{\partial x^2}$

したがって、 $t \geq t_2$ における鋼材の引張力 $P(t)$ は式(6)と式(7)_kを用いて次式の z と書き表わされる。

$$P(t) = E_s A_s \varepsilon_s(t) = \bar{P}(t) + E_s A_s \left\{ \varepsilon_{co}(t) - (1 + a f) \omega(t) \right\} \quad (9)$$

さて、現場打ちスラブの断面図心軸に関するモーメントおよび軸方向力の釣合条件より次式が成立する。

$$M(x) - P(t) f = \int_{A_p} \sigma_p(t) z dA_p + \int_{A_c} \sigma_c(t) z dA_c \quad (10)_k$$

$$-P(t) = \int_{A_p} \sigma_p(t) dA_p + \int_{A_c} \sigma_c(t) dA_c \quad (10)_c$$

式(10)_k, (10)_cの左辺に式(9)、右辺に式(4)_k, (4)_cを代入して整理すれば $\omega(t)$, $\varepsilon_{co}(t)$ に関する次の連立微分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} M(x) - f [\bar{P}(t) + E_s A_s \{ \varepsilon_{co}(t) - (1 + a f) \omega(t) \}] &= E_p \left\{ G_p \varepsilon_{co}(t) - \frac{I_p}{f} \omega(t) + G_p \bar{\varepsilon}_{po}(t) - \frac{I_p - a G_p}{f} \bar{\omega}(t) - (f + a) \int_{t_1}^t \bar{P}(\tau) \frac{1}{f} C_p(\tau, t) d\tau \right\} \\ &+ E_p \int_{t_1}^t \frac{1}{f} d\tau \left[G_p \{ \varepsilon'_{co}(t) - \delta P(\tau) E_p \varepsilon_{co}(t) \} - \frac{I_p}{f} \{ \dot{\omega}(t) - \delta P(\tau) E_p \dot{\omega}(t) \} - G_p \delta P(\tau) E_p \bar{\varepsilon}_{po}(t) + \frac{I_p - a G_p}{f} \delta P(\tau) E_p \bar{\omega}(t) \right. \\ &- (f + a) \int_{t_1}^t \bar{P}(\tau) \frac{1}{f} C_p(\tau, t) \delta P(\tau) E_p \varepsilon_{co}(t) d\tau + \int_{t_1}^t \frac{1}{f} d\tau \left\{ G_p \{ \varepsilon'_{co}(\tau) + \delta \varepsilon_{co}(\tau) \} - \frac{I_p}{f} \{ \dot{\omega}(\tau) + \delta \dot{\omega}(\tau) \} \right\} d\tau d\tau \\ &- \frac{E_c I_c}{f} \omega(t) - \frac{I_c}{f} \{ \dot{\omega}(t) - \delta P(t) E_c \omega(t) \} E_c \int_{t_1}^t d\tau - \frac{I_c}{f} \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t \delta P(\tau) E_c \{ \dot{\omega}(\tau) + \delta \dot{\omega}(\tau) \} d\tau d\tau \end{aligned} \quad (11)_k$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{P}(t_2)E_s A_s \dot{\varepsilon}_{co}(t) - (1+a/f)\dot{\omega}(t) = E_p \dot{\gamma} A_p \dot{\varepsilon}_{co}(t) - G_p \dot{\omega}(t) + A_p \bar{P}(t_2) - \frac{G_p - aA_p}{f} \dot{\omega}(t_2) - \int_{t_2}^t \bar{P}(\tau) \frac{G_p}{f} \dot{\gamma}_p(\tau) d\tau \\
& + E_p \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) - \gamma_p(\tau) E_p \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) - \frac{G_p}{f} \dot{\omega}(\tau) - \gamma_p(\tau) E_p \dot{\omega}(\tau) - A_p \gamma_p(\tau) E_p \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) + \frac{G_p - aA_p}{f} \gamma_p(\tau) E_p \dot{\omega}(\tau) \\
& - \int_{t_2}^t \bar{P}(\tau) \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) - \gamma_p(\tau) E_p \dot{\gamma}_p(\tau) d\tau + \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) E_p \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) + \gamma_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) - \frac{G_p}{f} \dot{\omega}(\tau) + \gamma_p(\tau) \dot{\omega}(\tau) d\tau d\tau \\
& + E_p A_p \dot{\varepsilon}_{co}(t) + A_p \dot{\varepsilon}_{co}(t) - \gamma_p(t) E_p \dot{\varepsilon}_{co}(t) + E_p \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) d\tau + A_p \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) d\tau + E_p \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) + \gamma_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) d\tau d\tau \quad (11)_k
\end{aligned}$$

ただし A_c : 現場打ちスラブの断面積 G_c : 現場打ちスラブの断面一次モーメント

I_c : 現場打ちスラブの断面二次モーメント G_p : PC桁の断面一次モーメント

I_p : PC桁の断面二次モーメント

式(11)_k, (11)_gをそれぞれ一回微分のうえ両辺に $\dot{\gamma}_p(t)$ をかけ、両辺をさらに t で微分して整理すれば次式がえられる。

$$\begin{aligned}
& \{E_s A_s (f+a) + (E_p I_p + E_c I_c)/f\} \dot{\omega}(t) + \{E_s A_s (f+a) \dot{\gamma}_p(t) + (\gamma_p E_p I_p + \dot{\gamma}_p E_c I_c)/f\} \dot{\omega}(t) + E_c I_c \dot{\gamma}_p(t) - \dot{\gamma}_p(t) \dot{\varepsilon}_{co}(t) \\
& + \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\omega}(\tau) d\tau = (E_s A_s f + E_p G_p) \dot{\varepsilon}_{co}(t) + \{E_s A_s \dot{\gamma}_p(t) + \gamma_p E_p G_p\} \dot{\varepsilon}_{co}(t) \quad (12)_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{E_s A_s (f+a) + E_p G_p\} \dot{\omega}(t) + \{E_s A_s (f+a) \dot{\gamma}_p(t) + \gamma_p E_p G_p\} \dot{\omega}(t) = f(E_s A_s + E_p G_p + E_c A_c) \dot{\varepsilon}_{co}(t) + f\{E_s A_s \dot{\gamma}_p(t) + \gamma_p E_p A_p + \dot{\gamma}_p E_c A_c\} \dot{\varepsilon}_{co}(t) \\
& + E_c f A_c \dot{\gamma}_p(t) - \dot{\gamma}_p(t) \dot{\varepsilon}_{co}(t) \quad [\dot{\varepsilon}_{co}(t) - \gamma_p(t) E_c \dot{\varepsilon}_{co}(t) + \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) + \gamma_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) d\tau] \quad (12)_g
\end{aligned}$$

4. 微分方程式の解法

いま、プレキャストPC桁と現場打ちスラブに同一のコンクリートを使用するものとし、 $\dot{\gamma}_p(t) = \dot{\gamma}_c(t)$ とおけば、式(12)_k, (12)_gより $\dot{\omega}(t)$ および $\dot{\varepsilon}_{co}(t)$ に関する2階の連立微分方程式がえられる。式(11)および式(12)から $\dot{\varepsilon}_{co}(t)$ および $\dot{\varepsilon}_{co}(t)$ を消去しかつ

$$\dot{\omega}(t) + \gamma \dot{\omega}(t) = g(t) \quad (13)$$

の置換を行えば、次の $g(t)$ に関する微分方程式がえられる。

$$\dot{g}(t) + A(t)g(t) = 0 \quad (14)$$

$$\text{ここに} \quad A(t) = \dot{\gamma}_p(t) - \dot{\gamma}_p(t)/\gamma(t) - \gamma E_p \rho(t)/E$$

$$E = \{L - R(1+a_0)(1+c_0)\} / [P/E \sqrt{L(2+da) - R(1+c_0) - (1+a_0)(1+cd)}] + \{L - R(1+a_0)(1+c_0)\}$$

$$R = (\gamma/f)^2, \quad \gamma_p^2 = I_p/A_p, \quad a_0 = A_c/A_p, \quad L = (G_p/fA_p)^2, \quad da = a/f$$

式(14)を解いて

$$g(t) = g(t_2) e^{-\int_{t_2}^t A(\tau) d\tau} \quad (15)$$

$g(t)$ が求められれば式(13)を解いて、 $\dot{\omega}(t)$ が次式で与えられる。

$$\dot{\omega}(t) = \dot{\omega}(t_2) + \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\omega}(\tau) + \int_{t_2}^t g(\tau) e^{-\int_{t_2}^t \gamma(\tau) d\tau} d\tau \quad (16)$$

式(16)を式(12)_kに代入し $\dot{\varepsilon}_{co}(t) + \gamma \dot{\varepsilon}_{co}(t) = g(t)$ と置くことにより容易に $\dot{\varepsilon}_{co}(t)$ がえられ、結果の明示は次式のごとくである。

$$\dot{\varepsilon}_{co}(t) = \dot{\varepsilon}_{co}(t_2) + \int_{t_2}^t \dot{\gamma}_p(\tau) \dot{\varepsilon}_{co}(\tau) + \int_{t_2}^t g(\tau) e^{-\int_{t_2}^t \gamma(\tau) d\tau} d\tau \quad (17)$$

式(16)を式(12)_kに代入し与えられた境界条件の下で解けばPC鋼材の軸方向力と載荷荷重に起因するPC合成桁の任意点のたわみが時間 t ($\geq t_2$) の関数として与えられ、同様に式(17)を式(12)_gに代入すれば任意時刻におけるPC合成桁の軸方向ひずみが求められる。さらにこれら両式および式(15)を式(9), (4)に

それぞれ代入して整理すれば、任意時刻におけるPC鋼材の引張力、PC桁および現場打ちスラブの応力が次式で与えられる。

$$P(t) = P(t_0) \left[1 - \frac{1}{K} \left\{ \delta \varphi(t_0) E_p J_2 - \frac{M(t_0) J_1}{P(t_0)} - \frac{J_3}{P(t_0)} \int_{t_0}^{t_2} P(t_0) \delta \varphi(t) E_p C_1 dt \right\} \right] \left[1 - e^{-\frac{\delta \varphi(t_0) E_p J_2}{K}} + \frac{\delta \varphi(t_0) E_p J_2}{K} \int_{t_0}^{t_2} e^{-\frac{\delta \varphi(t_0) E_p J_2}{K}} \frac{e^{-\frac{m(t-t_0)}{K}}}{\frac{e^{-\frac{m(t-t_0)}{K}}}{K}} dt \right] \quad (18)$$

$$G_p(t) = -P(t) \left\{ I_p + I_c - f G_p + \delta \{ f(A_p + A_c) - G_p \} / J_4 + M(t) \{ \delta(A_p + A_c) - G_p \} / J_4 + E_p \left[\{ A_c(I_p + I_c) - \delta G_p A_c \} \bar{C}_{co}(t) \} - \delta \varphi(t) E_p \int_{t_0}^{t_2} C_p dt \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{J_4} \left[A_c(I_p + I_c) + G_p I_c - \delta \{ I_c(A_p + A_c) + A_c G_p A_c \} \bar{u}(t) \} - \delta \varphi(t) E_p \int_{t_0}^{t_2} C_p dt \right] - \{ \{ (A_p + A_c)(I_p + I_c) - G_p^2 \} \frac{1}{J_4} + \frac{f(A_c - A_p)}{I_p - A_p A_p} \} - \{ I_p + I_c \right. \\ \left. - G_p(f + a) + \delta \{ f(A_p + A_c) - G_p \} \} \right] \left[\int_{t_0}^{t_2} P(t_0) \delta \varphi(t) E_p C_1 dt + \int_{t_0}^{t_2} P(t_0) \delta \varphi(t) E_p C_1 dt \right] / J_4 \quad (19)$$

$$G_c(t) = -P(t) \left\{ I_p + I_c - f G_p + \delta \{ f(A_p + A_c) - G_p \} / J_4 + M(t) \{ \delta(A_p + A_c) - G_p \} / J_4 + E_p \left[\{ G_p^2 - A_p(I_p + I_c) - \delta G_p A_c \} \bar{C}_{co}(t) \} - \delta \varphi(t) E_p \int_{t_0}^{t_2} C_p dt \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{J_4} \left[A_c(G_p^2 - A_p(I_p + I_c)) + G_p I_c - \delta \{ G_p^2 - I_p(A_p + A_c) + A_c G_p A_c \} \bar{u}(t) \} - \delta \varphi(t) E_p \int_{t_0}^{t_2} C_p dt \right] + [I_p + I_c - G_p(f + a) + \delta \{ f(A_p + A_c) - G_p \}] \right. \\ \left. \left[\int_{t_0}^{t_2} P(t_0) \delta \varphi(t) E_p C_1 dt + \int_{t_0}^{t_2} P(t_0) \delta \varphi(t) E_p C_1 dt \right] \right] / J_4 \quad (20)$$

ここに $J_0 = \{ I_p + I_c(A_p + A_c) - G_p^2 \}$, $J_1 = \{ f(A_p + A_c) - G_p \}$, $J_2 = \{ f(A_p + A_c) + I_p + I_c - (f + a) G_p \}$, $J_3 = \{ f(A_p + A_c) + I_p + I_c - 2(f + a) G_p \}$, $J_4 = (A_p + A_c)(I_p + I_c) - G_p^2$, $K = (E_c J_0 + E_p A_c I_c) / (E_p A_p)$, $m = \sqrt{E_p (1 - \nu)}$

5, 計算例

図-2のごとき丁形断面をもつスパン9m単純支持PC合成桁を考える。PC鋼線は鋼線群の圆心に集中するものとして取り扱い、そのヤング係数を $E_s = 2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ とする。またコンクリート断面の諸係数はPC鋼線断面積を無視して計算し、その弾性係数を $E_c = 2.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ とする。式(3)のクリープ関数を決定する任意定数は文献(1)より求めた $\alpha = 0.0304$, $A_1 = 2.94 \times 10^{-4}$, $C_1 = 0.508 \times 10^{-4}$ を採用する。コンクリートの材令が $t_0 = 7$ 日においてプレテンション方式により鋼線に $P(t_0) = 33.3 \text{ ton}$ の引張力を与え、次いで $t_2 = 21$ 日においてコンクリートスラブを現場打ちするものとする。時刻 t_2 以降は $\delta = 160 \text{ kg/cm}^2$

の自重が作用するものとしてPC鋼線の引張力の時間的変化を追跡すれば図-3のごとくである。

6, 結語

本研究はPC合成桁についてプレキャストPC

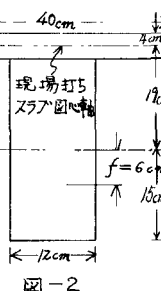


図-2

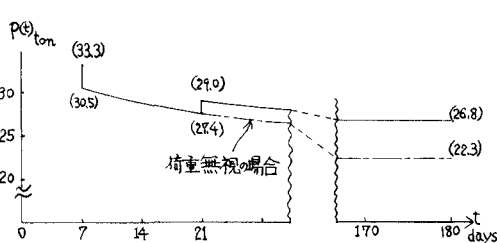


図-3; スパン中央におけるPC鋼材引張力の時間的変化

桁の初期導入プレストレス、スラブ打設後の自重および荷重による応力のクリープを全て考慮した微分方程式を誘導し、その厳密なクリープ挙動を明らかにせんとしたものである。本論の基本式となる式(12)の微分方程式は、その解を解析的に求めることが困難で一般には差分法等の近似解法を採用せねばならぬが、ここに取り扱いのごとくプレキャストPC桁および現場打ちスラブのコンクリートが同一材料からなる場合にはPC合成桁のクリープ挙動を解析的に追跡することが可能となる。

[参考文献]

- (1) 山崎秀坂羽根：PC桁のクリープに関する研究。第23回土木学会年次学術講演会概要。昭和43年10月
- (2) 山崎秀坂羽根：PC桁のクリープ挙動について。昭和43年度土木学会西部支部研究発表会論文集。昭和44年2月