

九州大学 正 員 山崎徳也

宮崎大学 正 員 太田俊昭

九州大学 学生員 ○北之園 宏

1. 序 合成桁は引張に強い鋼材と圧縮に強いコンクリートを効果的に組合せて、曲げ部材としての機能を生かし、併せて鋼材の節約をはかった経済性の高い構造形式である。

本論文は、補正エネルギー法により、鋼材とコンクリートスラブの不完全相互作用をなす合成桁の弾塑性挙動の解明への1段階として、まず完全相互作用をなす合成桁を対象とし、曲げモーメントと軸力の組合せ負荷を受ける場合の弾塑性変形について解析せんとするものである。

2. 応力-ひずみ関係の一般表示

鋼材の応力-ひずみ曲線とひずみ硬化を考慮した図-1のようなBilinearの折線でモデル化すると、弾性、塑性応力状態を含む応力-ひずみ関係式は、ひずみ ϵ_s の1次式で次のように一般表示される。

$$\sigma_s = M_s (\epsilon_s - \epsilon_s^0) \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 σ_s 、 ϵ_s ：鋼材の応力、ひずみ； M_s 、 ϵ_s^0 ：表-1に示す定数。

一方、コンクリートの応力-ひずみ曲線は一般に図-2に示されるようなり、ここでは、これを図-3のように1次曲線で近似する。

すなわち、コンクリートの応力-ひずみ関係式は次のように表示される。

$$\sigma_c = M_c (\epsilon_c - \epsilon_c^0) \quad \text{----- (2)}$$

ここに、 σ_c 、 ϵ_c ：コンクリートの応力、ひずみ； ϵ_c^0 ：表-2に示す定数。

M_c ：コンクリートの材質、材令によって異なる定数。

ここで、 $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ 、 $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$ を用いて式(1)、(2)を無次元化すれば、それぞれ

$$\bar{\sigma}_s = M_s (\bar{\epsilon}_s - \bar{\epsilon}_s^0) \quad \text{----- (3)}$$

$$\bar{\sigma}_c = M_c (\bar{\epsilon}_c - \bar{\epsilon}_c^0) \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 $M_s = M_s/\sigma_0$ 、

$$M_c = M_c/\sigma_0$$

M_c ：表-2に示す定数。

σ_0 、 ϵ_0 ：コンクリートの圧縮極限応力、ひずみ。

次に、桁の断面の上縁、下縁のひずみをそれぞれ、 ϵ_{us} 、 ϵ_{ls} とし、平面保持の法則を仮定すれば、任意点よりのひずみ ϵ_i は図-4より次式で与えられる。

$$\epsilon_i = (1 - \eta_i) \epsilon_{us} + \eta_i \epsilon_{ls} \quad \text{----- (5)}$$

ただし、 $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i/\epsilon_0$ 、 $\eta_i = y_i/h$ 、 $\bar{\epsilon}_{us} = \epsilon_{us}/\epsilon_0$ 、 $\bar{\epsilon}_{ls} = \epsilon_{ls}/\epsilon_0$ 。

y_i ：下縁より任意点よりの距離； h ：桁高。

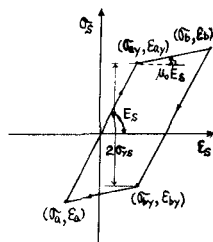


図-1

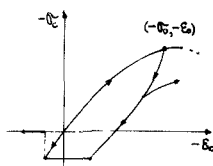


図-2

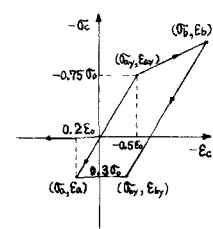


図-3

State	Range	M_s	ϵ_s^0
1	$\epsilon_{us} < \epsilon_s \leq \epsilon_{ys}$	E_s	$\epsilon_s - \sigma_s/E_s$
2	$\epsilon_{ys} < \epsilon_s \leq \epsilon_b$	$M_0 E_s$	$\epsilon_{ys} - \sigma_{ys}/M_0 E_s$
3	$\epsilon_b \leq \epsilon_s < \epsilon_{ls}$	E_s	$\epsilon_s - \sigma_s/E_s$
4	$\epsilon_{ls} \leq \epsilon_s < \epsilon_{us}$	$M_0 E_s$	$\epsilon_{ls} - \sigma_{ls}/M_0 E_s$

$$\epsilon_{ys} = \epsilon_a + 2\epsilon_{ys}, \quad \epsilon_{ls} = \epsilon_b - 2\epsilon_{ys}$$

$$\sigma_{ys} = \sigma_a + 2\sigma_{ys}, \quad \sigma_{ls} = \sigma_b - 2\sigma_{ys}$$

表-1

よって、任意点jの応力は式(3)(4)に式(5)を適用して

$$\bar{\sigma}_{sj} = \mu_s \{ (1 - \bar{y}_j) \bar{E}_s + \bar{y}_j \bar{E}_u - \bar{E}_s^0 \} \quad \text{----- (6)}$$

$$\bar{\sigma}_{cj} = \mu_c \{ (1 - \bar{y}_j) \bar{E}_c + \bar{y}_j \bar{E}_u - \bar{E}_c^0 \} \quad \text{----- (7)}$$

式(6),(7)より全断面の応力が算定できるが、この場合必ずしも表-1, 2に示れた各stepのうち、どのstepにあるかを判別し、式(6),(7)の未知係数 $\mu_{sj}, \mu_{cj}, \bar{E}_s^0, \bar{E}_c^0$ を決定する必要がある。その判別操作プログラムを図-5, 6に示す。

3. 曲げモーメントと軸力に対する応力ひずみ曲率の算定式

曲げモーメントMと軸力Nの組合せ負荷を受ける桁断面の内力と外力の釣合いより任意の応力状態におけるM,Nは次式のように算定される。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA \\ M - h_c N &= - \int_A \sigma y dA \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (8)}$$

ただし、A：断面積、 h_c ：純曲げが働く場合の下縁より中立軸までの距離。

式(8)を無次元化して式(6),(7)を代入すれば、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \left\{ \int_{A_s} \mu_s \{ (1 - \bar{y}) \bar{E}_s + \bar{y} \bar{E}_u - \bar{E}_s^0 \} dA + \int_{A_c} \mu_c \{ (1 - \bar{y}) \bar{E}_c + \bar{y} \bar{E}_u - \bar{E}_c^0 \} dA \right\} / A \\ (M_0 / h_c A) \bar{M} - \bar{h}_c \bar{N} &= - \left\{ \int_{A_s} \mu_s \{ \bar{y} (1 - \bar{y}) \bar{E}_s + \bar{y} \bar{E}_u - \bar{y} \bar{E}_s^0 \} dA + \int_{A_c} \mu_c \{ \bar{y} (1 - \bar{y}) \bar{E}_c + \bar{y} \bar{E}_u - \bar{y} \bar{E}_c^0 \} dA \right\} / A \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (9)}$$

ここに $\bar{M} = M / M_0$, $\bar{N} = N / N_0$, A_s ：鋼材の断面積, A_c ：コンクリートの断面積。

M_0, N_0 ：無次元化のための基準モーメント, 軸力。

式(9)の積分は $\mu_s, \bar{E}$ が断面内の各点で異なるゆえ、断面を図-7のように分割し、その積分値を求めれば、次の式(10),(11)がえられる。

$$\bar{N} = \frac{1}{2} (a_1 \bar{E}_s + a_2 \bar{E}_u - a_3) \quad \text{----- (10)}$$

$$(6M_0 / h_c A) \bar{M} - \bar{h}_c \bar{N} = - (b_1 \bar{E}_s + b_2 \bar{E}_u - b_3) \quad \text{----- (11)}$$

ただし、 $a_1 = \bar{A}_u \omega h_1 \sum_{NC1}^{NC1+1} \{ \mu_{sj} (1 - \bar{y}_j) + \mu_{sq+n} (1 - \bar{y}_{q+n}) \}$

$$+ \bar{A}_c \bar{h}_2 \sum_{NC1}^{NC2-1} \{ \mu_{cj} (1 - \bar{y}_j) + \mu_{cq+n} (1 - \bar{y}_{q+n}) \} + \bar{A}_s \{ \mu_{sf} (1 - \bar{y}_f) + \mu_{sf'} (1 - \bar{y}_{f'}) \}$$

$$a_2 = \bar{A}_u \omega h_1 \sum_{NC1}^{NC1+1} \{ \mu_{sj} \bar{y}_j + \mu_{sq+n} \bar{y}_{q+n} \} + \bar{A}_c \bar{h}_2 \sum_{NC1}^{NC2-1} \{ \mu_{cj} \bar{y}_j + \mu_{cq+n} \bar{y}_{q+n} \} + \bar{A}_s \{ \mu_{sf} \bar{y}_f + \mu_{sf'} \bar{y}_{f'} \}$$

$$a_3 = \bar{A}_u \omega h_1 \sum_{NC1}^{NC1+1} \{ \mu_{sj} \bar{E}_s^0 + \mu_{sq+n} \bar{E}_s^0 \} + \bar{A}_c \bar{h}_2 \sum_{NC1}^{NC2-1} \{ \mu_{cj} \bar{E}_c^0 + \mu_{cq+n} \bar{E}_c^0 \} + \bar{A}_s \{ \mu_{sf} \bar{E}_s^0 + \mu_{sf'} \bar{E}_s^0 \}$$

$$b_1 = \bar{A}_u \omega h_1 \sum_{NC1}^{NC1+1} \{ \mu_{sj} (1 - \bar{y}_j) (3 \bar{y}_j + a \bar{h}) + \mu_{sq+n} (1 - \bar{y}_{q+n}) (3 \bar{y}_j + 2 a \bar{h}) \}$$

$$+ \bar{A}_c \bar{h}_2 \sum_{NC1}^{NC2-1} \{ \mu_{cj} (1 - \bar{y}_j) (3 \bar{y}_j + a \bar{h}) + \mu_{cq+n} (1 - \bar{y}_{q+n}) (3 \bar{y}_j + 2 a \bar{h}) \} + 3 \bar{A}_s \{ \mu_{sf} \bar{y}_f (1 - \bar{y}_f) + \mu_{sf'} \bar{y}_{f'} (1 - \bar{y}_{f'}) \}$$

$$b_2 = \bar{A}_u \omega h_1 \sum_{NC1}^{NC1+1} \{ \mu_{sj} \bar{y}_j (3 \bar{y}_j + a \bar{h}) + \mu_{sq+n} \bar{y}_{q+n} (3 \bar{y}_j + 2 a \bar{h}) \}$$

$$+ \bar{A}_c \bar{h}_2 \sum_{NC1}^{NC2-1} \{ \mu_{cj} \bar{y}_j (3 \bar{y}_j + a \bar{h}) + \mu_{cq+n} \bar{y}_{q+n} (3 \bar{y}_j + 2 a \bar{h}) \} + 3 \bar{A}_s \{ \mu_{sf} \bar{y}_f^2 + \mu_{sf'} \bar{y}_{f'}^2 \}$$

$$b_3 = \bar{A}_u \omega h_1 \sum_{NC1}^{NC1+1} \{ \mu_{sj} (3 \bar{y}_j + a \bar{h}) \bar{E}_s^0 + \mu_{sq+n} (3 \bar{y}_j + 2 a \bar{h}) \bar{E}_s^0 \}$$

$$+ \bar{A}_c \bar{h}_2 \sum_{NC1}^{NC2-1} \{ \mu_{cj} (3 \bar{y}_j + a \bar{h}) \bar{E}_c^0 + \mu_{cq+n} (3 \bar{y}_j + 2 a \bar{h}) \bar{E}_c^0 \} + 3 \bar{A}_s \{ \mu_{sf} \bar{y}_f \bar{E}_s^0 + \mu_{sf'} \bar{y}_{f'} \bar{E}_s^0 \}$$

ここに、 $\bar{A}_u = \omega h_1 / A$, $\bar{A}_c = b h_2 / A$, $\bar{A}_s = 2 t d / A$, $A = \omega h_1 + b h_2 + 2 t d$, $a \bar{h} = h_1 / A_1 = h_2 / A_2$ 。

$$NC1 = N1 + 4, \quad NC2 = NC1 + N2.$$

添字f,f'は上下flangeの図心点を、添字S,Cは鋼材,コンクリート部を示す。

次に、 M_0, N_0 として桁上縁の圧縮応力 σ_u が弾性限界時の応力 $0.75 \sigma_b$ となる場合の曲げモーメント M_Y , 曲率 ϕ_Y を弾性計算により求める。

Step	Range	μ_c	E_c^0
1	$E_b < E_c < E_{ay}$	0.5	$(E_{ay} - 0.5 E_b) / 0.5$
2	$E_b < E_c < E_{by}$	1.5	$E_b - 0.5 E_c / 1.5$
3	$E_{ay} < E_c < E_a$	0	$0.3 E_0$
4	$E_{ay} < E_c < E_a$	1.5	$E_a - 0.5 E_c / 1.5$
5	$E_c > 0.2 E_0$	0	0

$E_{by} = (0.3 E_0 - 0.5 E_b) / 1.5 + E_b$
 $E_{ay} = E_a - 0.7 E_0$
 $0_{ay} = 1.5 (E_{ay} - E_a) + 0.6 E_a, \quad 0_{by} = 0.3 E_0$

表-2

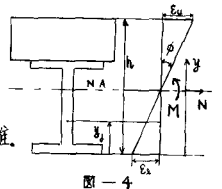


図-4

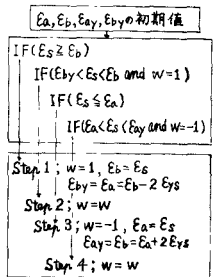


図-5

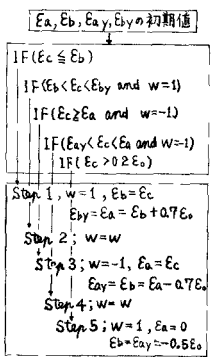


図-6

純曲げモーメントが働いている場合は、釣合い条件として次式が成立する。

$$N = \int_A \sigma dA = 0 \quad \text{---(12)}$$

式(12)を無次元化すれば、

$$\bar{N} = \int_A \bar{\sigma} dA / A = 0 \quad \text{---(13)}$$

ここで、 $\bar{\sigma}_s$ および $\bar{\sigma}_c$ はそれぞれ、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_s &= n_1 \{ (1 - \bar{y}) \bar{\sigma}_x + \bar{y} \bar{\sigma}_u \} \\ \bar{\sigma}_c &= (1 - \bar{y}) \bar{\sigma}_x + \bar{y} \bar{\sigma}_u \end{aligned} \right\} \quad \text{---(14)}$$

ただし、 $\bar{\sigma}_x$ 、 $\bar{\sigma}_u$ ：下縁、上縁の応力； $\bar{\sigma}_s = \sigma_s / \sigma_0$ 、 $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_0$ 、 $n_1 = E_s / E_c$ 。

よって式(13)の積分は次式により求められる。

$$\bar{N} = \int_A \bar{\sigma} dA / A = \left[n_1 \{ (1 - \bar{y}) \bar{\sigma}_x + \bar{y} \bar{\sigma}_u \} dA + \{ (1 - \bar{y}) \bar{\sigma}_x + \bar{y} \bar{\sigma}_u \} dA + t \cdot d \cdot n_1 \{ (1 - \bar{y}_f) \bar{\sigma}_x + \bar{y}_f \bar{\sigma}_u + (1 - \bar{y}_f') \bar{\sigma}_x + \bar{y}_f' \bar{\sigma}_u \} \right] / A \quad \text{---(15)}$$

ただし、 A_w ：鋼材のwebの断面積。

式(15)の右辺を零とおいて、次の関係式をうる。

$$\bar{\sigma}_u = -\beta \bar{\sigma}_x \quad \text{---(16)}$$

$$\beta = \frac{n_1 \bar{A}_s \{ 2(\bar{t}_2 - \bar{t}) - (\bar{t}_3 - \bar{t}) \} / \bar{h}_1 + \bar{A}_c \{ 2(1 - \bar{t}_3) - (1 - \bar{t}_3) \} / \bar{h}_2 + n_1 \bar{A}_f \{ (1 - \bar{y}_f) + (1 - \bar{y}_f') \}}{n_1 \bar{A}_s (\bar{t}_2 - \bar{t}) / \bar{h}_1 + \bar{A}_c (1 - \bar{t}_3) / \bar{h}_2 + n_1 \bar{A}_f (\bar{y}_f + \bar{y}_f')}$$

ただし、 $\bar{t}_2 = t_2 / h$ 、 $\bar{t}_3 = t_3 / h$ 、 $\bar{t} = t / h$ 、 $\bar{y}_f = y_f / h$ 、 $\bar{y}_f' = y_f' / h$ 、 $\bar{h}_1 = h_1 / h$ 、 $\bar{h}_2 = h_2 / h$ 、 $t_2 = t + h_1$ 、 $t_3 = 2t + h_1$ 。

しかるに、桁上縁の圧縮応力はコンクリートの弾性限界応力 $0.75 \sigma_0$ であるゆえ、式(16)より次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_u &= -0.75 \\ \bar{\sigma}_x &= 0.75 / \beta \end{aligned} \right\} \quad \text{---(17)}$$

さて、弾性限界モーメント M_Y が作用しているときの内力と外力の釣合いは式(8)において $N = 0$ とおけば、

$$M_Y + \int_A y dA = 0 \quad \text{---(18)}$$

式(18)を変形し、式(17)を適用すれば、結局、次式がえられる。

$$M_Y = 0.75 \sigma_0 A h \beta_1 / 6 \beta = M_0 \quad \text{---(19)}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \beta_1 &= \beta \{ 2 \bar{A}_s n_1 (\bar{t}_2 - \bar{t}) / \bar{h}_1 + 2 \bar{A}_c (1 - \bar{t}_3) / \bar{h}_2 + 3 \bar{A}_f n_1 (\bar{y}_f^2 + \bar{y}_f'^2) \} \\ &\quad - \left[\bar{A}_s n_1 \{ 3(\bar{t}_2 - \bar{t}) - 2(\bar{t}_3 - \bar{t}) \} / \bar{h}_1 + \bar{A}_c \{ 3(1 - \bar{t}_3) - 2(1 - \bar{t}_3) \} / \bar{h}_2 + 3 \bar{A}_f n_1 \{ \bar{y}_f(1 - \bar{y}_f) + \bar{y}_f'(1 - \bar{y}_f') \} \right] \end{aligned}$$

一方、このときの ϕ は図-4のひずみ分布より $\phi = \epsilon_0 (\bar{E}_x - \bar{E}_u) / h$ なる一般式で与えられるゆえ、弾性限界時の曲率 ϕ_Y は、 $\bar{E}_x = \bar{\sigma}_x / 1.5$ 、 $\bar{E}_u = \bar{\sigma}_u / 1.5$ と式(19)の結果とを用いれば、次値となる。

$$\phi_Y = 0.5 \epsilon_0 (1 + \beta) / (\beta h) = \phi_0 \quad \text{---(20)}$$

よって、上述の結果を用いれば、無次元化した曲率 $\varphi = \phi / \phi_0$ が次のように求められる。

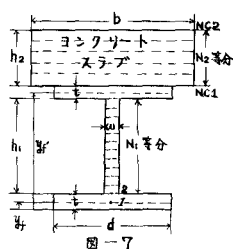
$$\varphi = \phi / \phi_0 = 2 \beta (\bar{E}_x - \bar{E}_u) / (1 + \beta) \quad \text{---(21)}$$

また、式(11)は式(19)より、次のように変形される。

$$-(0.75 \beta_1 / \beta) \bar{M} + 6 \bar{h}_c \bar{N} = B_1 \bar{E}_x + B_2 \bar{E}_u - B_3 \quad \text{---(22)}$$

式(10)と式(22)を $\bar{E}_x$ 、 $\bar{E}_u$ について連立に解けば、次式をうる。

$$\bar{E}_x = \{ -a_2 B_3 + a_3 B_2 + (2 B_2 - 6 a_2 \bar{h}_c) \bar{N} + (0.75 a_2 \beta_1 / \beta) \bar{M} \} / (a_1 B_2 - a_2 B_1) \quad \text{---(23-a)}$$



$$\bar{E}_u = \{a_1 B_3 - a_3 B_1 + (6a_1 h_c - 2B_1) \bar{N} - (0.75 a_1 B_1 / \beta) \bar{M}\} / (a_1 B_2 - a_2 B_1) \quad \text{--- (23-b)}$$

4. 計算例

上記誘導諸式を用いて中央集荷重Pを受ける図-9のT型合成桁の単結ばりについて解析すれば、以下の結果をうる。

ただし、スパン中央点のたわみは補正エネルギー $C = \iint \phi dM ds$ に変分原理を適用することにより、次のように求められる。

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial P} = \int_0^L \phi \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad \text{--- (24)}$$

上式に $M = -\frac{P}{2}x$ を代入のうえ、無次元化すれば (図-9参照)

$$\bar{\delta} = \delta / L = \frac{P L}{4} \int_0^1 \phi \bar{x} d\bar{x} \quad \text{--- (25)}$$

ただし、 $\bar{x} = x / (L/2)$

よって、式(20),(21),(23-a),(23-b),(25)を併用すれば、与荷重に対するたわみ $\bar{\delta}$ が算定でき、そのフローチャートは図-10のようになる。以上の結果の一部を示せば図-11, 12, 13のようになる。

なお、本計算例で用いる諸値は次のとおりである。

$$\bar{\sigma}_s = 7.0, E_0 = 1.62 \times 10^3, \sigma_c = 300 \text{ kg/cm}^2, E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, n_1 = 7.56.$$

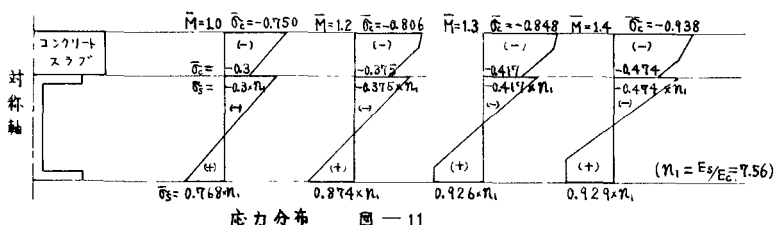


図-11 応力分布

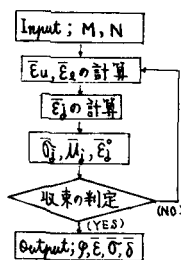


図-10

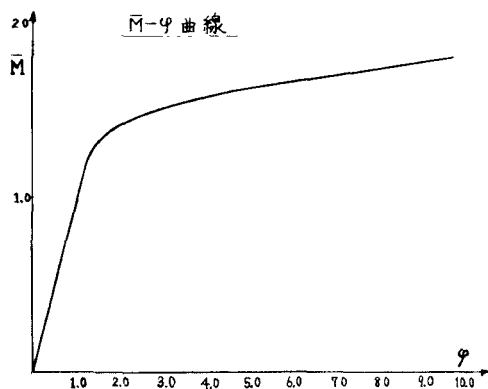


図-12

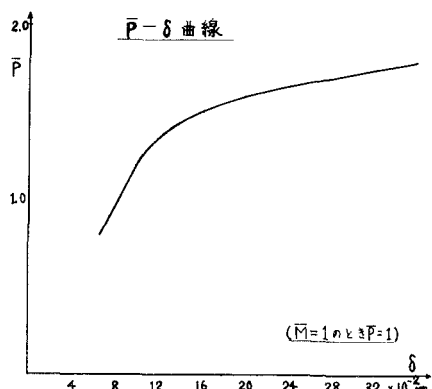


図-13

5 結び

本研究の結果、曲げモーメントと軸力の組合せ負荷を受け完全相互作用をなす合成桁の弾塑性解析が可能となったが、Shear Studのせん断力とせん断すべりの関係式を導入することにより、鋼材とコンクリートの間のすべりを考慮した場合も、同様な手法で解明することができる。

(参考文献) 山崎, 太田, "有限変形理論によるRCおよび合成桁の弾塑性解析", 第16回橋梁・構造工学研究発表会(1969-12-5), P.91