

II-10 クリープを考慮した鉄筋コンクリート ばりの乾燥収縮応力の解法

九州大学 正員 彦坂 照

“ 学生員 熊谷恒一郎

1. 緒言

コンクリートの乾燥収縮に起因する鉄筋コンクリート部材(以後RC部材と略す)の変形と応力の解析に関しては、いくつかの研究文献が¹⁾見られるが、その多くは最終たわみや最終応力のみを推定する近似解法であり、任意時刻における変形や応力のクリープを考慮した解析に関する研究は、曲げを伴わない軸方向および軸面内問題に限られている。しかし、通常の曲げ部材において、鉄筋が断面中心に配置されることは極めて少いから、多くの場合、乾燥収縮を起したRC部材には、軸方向応力に加えて曲げ応力が生じることになる。

曲げ応力と軸方向応力とを同時に取り扱った例としては、C. A. MillerとS. A. Guralnick²⁾の研究があるが、基本式として導かれる非線型の連立微分方程式を解くことが極めて困難である。

本研究は、乾燥収縮を起した複鉄筋矩形断面コンクリートばりを対象とし、まずクリープを考慮したコンクリートの応力-たわみ関係式を導いたのち、はり断面のふたつの平衡条件より変形の基礎微分方程式を誘導し、次いでこれらを連立に解いて任意時刻における応力と算定し、乾燥収縮応力のクリープ挙動を追跡せんとしたものである。また本法は、ふたつの平衡条件より真いに基礎方程式が線型常微分方程式である、およびその連立微分方程式を解くことにより曲げ応力および軸方向応力を同時に取り扱うる、実などに大きな利便を有する。

本研究で取り扱うRC部材には、コンクリートクリープ理論で一般に認められているDavis-Ghannvilleの法則およびWhitneyの法則のほか、Bernoulliの平面保持の法則が成り立つものとし、コンクリートの弾性係数は引張側と圧縮側で等しい値をとるものと仮定する。

2. クリープ関数

・ 材令 τ において単位の特続荷重を加えられたコンクリートの時刻 t における総たわみ $\delta(t, \tau)$ は、次式にて与えられる。

$$\delta(t, \tau) = 1/E_c(\tau) + C(t, \tau) \quad (1)$$

ここに、 $E_c(\tau)$ は材令 τ におけるコンクリートの弾性係数、 $C(t, \tau)$ はクリープ関数である。

したがって、材令 τ において任意の特続荷重 $\sigma(\tau)$ を加えられたコンクリートの時刻 t における総たわみを $\varepsilon_c(t)$ とすれば、

$$\varepsilon_c(t) = \sigma(\tau) \delta(t, \tau) + \int_{\tau}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau \quad (2)$$

式(2)の右辺第2項を部分積分のうえ式(1)を用いて整理すれば、次式がえられる。

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (3)$$

本論文においては、クリープ関数 $C(t, \tau)$ はAnatunyan³⁾に従って、次式を用いるものとする。

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-r(t-\tau)}] \quad \varphi(\tau) = A_1/\tau + C_0 \quad (4)$$

ここに、 r, A_1 および C_0 は任意定数である。

3. 乾燥収縮を起したRC部材のコンクリートの応力ひずみ関係式

時刻 t におけるコンクリートの自由乾燥収縮ひずみ $S_n(t)$ は一般に次式にて表示される。

$$S_n(t) = S_0 [1 - e^{-\gamma t}] \quad (5)$$

ここに γ, S_0 はコンクリートの諸条件に支配される任意定数である。

乾燥収縮を起したRC部材のひずみは次の2つの部分に分割される。即ち1つは自由乾燥収縮ひずみ、他の1つは鉄筋の抵抗によりコンクリートに引き起される応力 $\sigma_c(t)$ によるひずみである。後者はクリープを伴うものであるゆえ式(3)を用いればRC部材の時刻 t における総ひずみ $\epsilon_c(t)$ が次式にて表わされる。

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} - \int_0^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + \phi(\tau, \tau) \right] d\tau - S_n(t) \quad (6)$$

式(6)の両辺を t で1回微分し、かつ式(6)を用いて積分項の消去を行えば

$$\frac{\dot{\sigma}_c(t)}{E_c(t)} + \gamma \left[\frac{1}{E_c(t)} + \phi(t) \right] \sigma_c(t) - \int_0^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + \phi(\tau) \right] d\tau = (\dot{\epsilon}_c(t) + \dot{S}_n(t)) + \gamma (\epsilon_c(t) + S_n(t)) \quad (7)$$

式(7)の両辺をさらに t で微分し整理すれば、結局 $\sigma_c(t)$ に関する次の2階常微分方程式をうる。

$$\ddot{\sigma}_c(t) + \dot{\sigma}_c(t) \{ \gamma [1 + \phi(t) E_c(t)] - \dot{E}_c(t)/E_c(t) \} = E_c(t) \{ (\ddot{\epsilon}_c(t) + \dot{S}_n(t)) + \gamma (\dot{\epsilon}_c(t) + \dot{S}_n(t)) \} \quad (8)$$

式(6)および(7)に $t=0$ を代入し、初期条件 $\sigma_c(0), \dot{\sigma}_c(0)$ を決定すれば

$$\sigma_c(0) = E_c(0) (\epsilon_c(0) + S_n(0)), \quad \dot{\sigma}_c(0) = E_c(0) (\dot{\epsilon}_c(0) + \dot{S}_n(0)) - \gamma \phi(0) E_c(0) \sigma_c(0) \quad (9)$$

式(9)の初期値を用いて微分方程式(8)を解けば、所要のクリープを考慮したコンクリートの応力ひずみ関係式が次の式(10)で与えられる。

$$\sigma_c(t) = \sigma_c(0) + \int_0^t e^{-\gamma(\tau)} \left[\dot{\sigma}_c(0) + \int_0^\tau E_c(\tau) \{ (\ddot{\epsilon}_c(\tau) + \dot{S}_n(\tau)) + \gamma (\dot{\epsilon}_c(\tau) + \dot{S}_n(\tau)) \} e^{\gamma\tau} d\tau \right] d\tau \quad (10)$$

$$\text{ここに } \gamma(\tau) = \int_0^\tau \{ \gamma [1 + \phi(\tau) E_c(\tau)] - \dot{E}_c(\tau)/E_c(\tau) \} d\tau$$

4. 乾燥収縮を起したRC部材における変形の基礎微分方程式

図-1のごとき厚さ h 、中木の縦鉄筋矩形断面ばりを考える。

上端より $h/2$ の面を基準面とし、基準面にそって部材軸方向に x 軸を、また x 軸に垂直下向きに z 軸をとり、 x 軸に平行に引張鉄筋 A_{st} および圧縮鉄筋 A_{sc} が配置されているものとする。

コンクリートの弾性係数 $E_c(t)$ は時刻 t での変化にともなう幾分その値が変化することが知られているが $t > 28$ 日ではその変化は無視できる程度のものであるから、以後計算の便宜上これを定数と見なし $E_c(t) = E_c$ とする。

今、RC部材のひずみ分布を図-2のように仮定する。ここに、 $\epsilon_{co}(t)$ は基準面における収縮ひずみ、 $\frac{\partial^2 w(t)}{\partial z^2}$ は曲率である。この時、RC部材の任意の断面の基準面より距離 z の点のひずみ $\epsilon_c(t)$ は

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{co}(t) - z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial z^2} \quad (11)$$

にて表わされる。また鉄筋の基準面からの距離 z_s を式(11)に用いれば、引張鉄筋ひずみ ϵ_{st} および

$$\begin{aligned} \text{圧縮鉄筋ひずみ } \epsilon_{sc} \text{ は} \quad \epsilon_{st}(t) &= \epsilon_{co}(t) - z_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial z^2} \\ \epsilon_{sc}(t) &= \epsilon_{co}(t) + z_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (12)$$

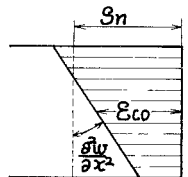
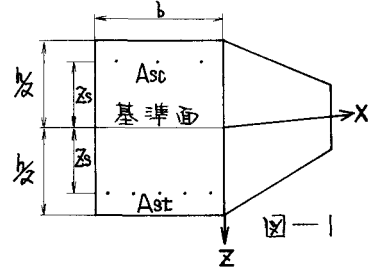


図-2

で表わされる。上式を用いて鉄筋の応力を求めれば次式の結果となる。

$$\sigma_{st}(t) = E_s(\dot{\epsilon}_{co}(t) - z_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}) \quad \sigma_{sc}(t) = E_s(\dot{\epsilon}_{co}(t) + z_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}) \quad (13)$$

ここで 1 片の平衡条件として、任意の時刻 t において次の 2 式が成り立たねばならない。

$$\int_{Ac} \sigma_c(t) dAc + \int_{Ast} \sigma_{st}(t) dAst + \int_{Asc} \sigma_{sc}(t) dAsc = 0 \quad (14)_a$$

$$\int_{Ac} \sigma_c(t) z dAc + \int_{Ast} \sigma_{st}(t) z_s dAst + \int_{Asc} \sigma_{sc}(t) (-z_s) dAsc = 0 \quad (14)_b$$

即ち 式 (14)_a は任意断面における水平力の釣合式 式 (14)_b はモーメントの釣合式である。

式 (10), (11), (13) を用いてコンクリート応力 $\sigma_c(t)$ および鉄筋応力 σ_{st} , σ_{sc} を $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ および $\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}$ で表示したのち式 (14) の平衡条件式に代入すれば、

$$A_s \dot{\epsilon}_{co}(t) - G_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + (\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t)) + \{(\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t)) - r E_c \varphi(t) (\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t))\} \int_0^T e^{-r\tau} d\tau + \int_0^T \{(\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t)) + r (\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t))\} e^{-r\tau} d\tau = 0$$

$$G_s \dot{\epsilon}_{co}(t) - I_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - I_c \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - I_c \left(\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - r E_c \varphi(t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right) \int_0^T e^{-r\tau} d\tau - I_c \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right) e^{-r\tau} d\tau = 0$$

$$A_s = E_s(A_{st} + A_{sc})/E_c A_c, \quad G_s = E_s(A_{st} - A_{sc})z_s/E_c A_c, \quad I_s = E_s(A_{st} + A_{sc})z_s^2/E_c A_c, \quad I_c = K^2/12. \quad (15)$$

式 (15) を式 (14) で 1 回微分の上で整理すれば

$$A_s \dot{\epsilon}_{co}(t) - G_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + \{(\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t)) - r E_c \varphi(t) (\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t))\} e^{-r\tau} + e^{-r\tau} \int_0^T \{(\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t)) + r (\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{S}_m(t))\} e^{-r\tau} d\tau = 0 \quad (16)_a$$

$$G_s \dot{\epsilon}_{co}(t) - I_s \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - I_c \left(\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - r E_c \varphi(t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right) e^{-r\tau} - I_c e^{-r\tau} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right) e^{-r\tau} d\tau = 0 \quad (16)_b$$

式 (16) の両辺に $e^{r\tau}$ を乗じて、さらに式 (16) で 1 回微分すれば、結局 $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ および $\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}$ に関する次の 2 階の連立微分方程式が導かれる。

$$(1 + A_s) \ddot{\epsilon}_{co}(t) + (r + \dot{\varphi}(t)) \dot{\epsilon}_{co}(t) - G_s \left(\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + \dot{\varphi}(t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right) = -(\dot{S}_m(t) + r \dot{S}_m(t)) \quad (17)_a$$

$$G_s (\dot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{\varphi}(t) \dot{\epsilon}_{co}(t)) - (I_c + I_s) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} - (r I_c + \dot{\varphi}(t) I_s) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} = 0 \quad (17)_b$$

また、 $\dot{S}_m(t) = 0$ であることに注意して式 (15) および (16) に $t = 0$ を代入すれば初期条件が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{co}(0) &= 0, & \dot{\epsilon}_{co}(0) &= -(I_c + I_s) \dot{S}_m(0)/K \\ \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} &= -G_s \dot{S}_m(0)/K \end{aligned} \quad K = (1 + A_s)(I_c + I_s) - G_s^2 \quad (18)$$

5. 変形の基本微分方程式の解法

式 (17)_a および (17)_b より $\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}$ を消去し、更に式 (16)_a を用いて $\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}$ をも消去したのち 両辺に $e^{r\tau}/(r - \dot{\varphi}(t))$ を乗じて式 (17) で 1 回微分すれば、 $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ のみに関する次の 3 階微分方程式をうる。

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}_{co}(t) + [2r - \frac{\dot{\varphi}(t)}{r - \dot{\varphi}(t)} + r E_c \varphi(t) \{1 - \frac{I_c - (I_s A_s - G_s^2)}{K}\}] \dot{\epsilon}_{co}(t) + [r - \frac{\dot{\varphi}(t)}{r - \dot{\varphi}(t)} + r E_c \varphi(t) \{1 - \frac{I_c - (I_s A_s - G_s^2)}{K}\} + r E_c^2 \varphi^2(t) \frac{I_s A_s - G_s^2}{K}] \dot{\epsilon}_{co}(t) \\ = -\dot{f}_e(t), \quad \text{ここに } f_e(t) = (I_c I_s) [\dot{S}_m(t) + r \dot{S}_m(t)] + [r - \dot{\varphi}(t)/\varphi(t) + r E_c \varphi(t) I_s / (I_c + I_s) (\dot{S}_m(t) + r \dot{S}_m(t))] / K \end{aligned} \quad (19)$$

全く同様に式 (17)_a および (17)_b より $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ を、さらに (16)_b を用いて $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ を消去し、積分項の消去を行えば $\frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}$ に関する 3 階微分方程式が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + [2r - \frac{\dot{\varphi}(t)}{r - \dot{\varphi}(t)} + r E_c \varphi(t) \{1 - \frac{I_c - (I_s A_s - G_s^2)}{K}\}] \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + [r - \frac{\dot{\varphi}(t)}{r - \dot{\varphi}(t)} + r E_c \varphi(t) \{1 - \frac{I_c - (I_s A_s - G_s^2)}{K}\} + r E_c^2 \varphi^2(t) \frac{I_s A_s - G_s^2}{K}] \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \\ = -f_w(t), \quad \text{ここに } f_w(t) = G_s [(I_s \dot{S}_m(t) + r \dot{S}_m(t)) + (r + r E_c \varphi(t) - \dot{\varphi}(t)/\varphi(t)) \dot{S}_m(t) + r \dot{S}_m(t)] / K \end{aligned} \quad (20)$$

また 式 (19), (20) の誘導過程における式の中に $\tau = \tau_0$ を代入すれば、式 (18) に加えて初期値 $\dot{\epsilon}_{co}(0)$ および $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0)$ が次の式 (21) のごとく決定される。

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{co}(0) &= -(I_c + I_s) [\dot{\epsilon}_m(0) - r E_c \psi(0) \{1 - (I_c + I_s)/K - I_c G_s^2 / K (I_c + I_s)\} \dot{\epsilon}_m(0)] / K, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) &= -G_s [\dot{\epsilon}_m(0) + r E_c \psi(0) (I_c - I_s A_s + G_s) \dot{\epsilon}_m(0)] / K\end{aligned}\quad (21)$$

特例として単鉄筋断面ばりを考えれば $I_s A_s - G_s^2 = 0$ なる関係式より 基礎微分方程式 (19) および (20) は次の式 (22) のごとく 1 階の線型常微分方程式に容易に変換される。

$$(\ddot{\epsilon}_{co}(x) + r \dot{\epsilon}_{co}(x)) + [r - \psi(x)/\psi(0) + r E_c \psi(x) (1 - I_c/K)] (\dot{\epsilon}_{co}(x) + r \epsilon_{co}(x)) = -f_e(x) \quad (22)_a$$

$$(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r \frac{\partial w}{\partial x}) + [r - \psi(x)/\psi(0) + r E_c \psi(x) (1 - I_c/K)] (\frac{\partial w}{\partial x} + r w) = -f_w(x) \quad (22)_b$$

即ち $\dot{\epsilon}_{co}(x) + r \epsilon_{co}(x) = y_e$ とおけば、式 (22)_a は y_e に関する 1 階線型常微分方程式に帰着する。また $\frac{\partial w}{\partial x} + r w = y_w$ とおけば、式 (22)_b も全く同様に y_w の 1 階線型方程式に帰せられる。したがって式 (18) および (21) の初期条件を用いて式 (22)_a および (22)_b を古典的求積法により解けば

$$\begin{aligned}\epsilon_{co}(x) &= e^{r(x-\tau_0)} \int_{\tau_0}^x e^{-(x-\tau)} \left[\dot{\epsilon}_{co}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\tau-\zeta)} \left[(\dot{\epsilon}_{co}(\zeta) + r \epsilon_{co}(\zeta)) - \int_{\tau_0}^{\zeta} e^{-(\zeta-\eta)} f_e(\eta) d\eta \right] d\zeta \right] d\tau \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x) &= e^{r(x-\tau_0)} \int_{\tau_0}^x e^{-(x-\tau)} \left[\frac{\partial w}{\partial x}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\tau-\zeta)} \left[(\frac{\partial w}{\partial x}(\zeta) + r w(\zeta)) - \int_{\tau_0}^{\zeta} e^{-(\zeta-\eta)} f_w(\eta) d\eta \right] d\zeta \right] d\tau \\ \mu(x) &= \int_{\tau_0}^x [r - \psi(\eta)/\psi(0) + r E_c \psi(\eta) (1 - I_c/K)] d\tau\end{aligned}\quad (23)$$

式 (23) の結果を式 (11) に代入し、えうかにコンクリートの σ 及び ϵ をさらに式 (10) に代入すれば、任意の時刻 t におけるコンクリート応力 $\sigma(x)$ が算定される。鉄筋の応力は式 (23) の結果を直接式 (13) に代入すれば容易に算出される。

6. 結語

本論文は乾燥収縮を起した鉄筋コンクリートばりの断面の平衡条件より 2 つの基礎方程式を 3 階の線型常微分方程式として導き、単鉄筋断面を例にとりて古典的求積法により厳密解析を行なったものである。一般の複鉄筋断面のばりについて厳密解を求めることは非常に困難であるが、この場合も階差法や Runge-Kutta 法などを用いて基礎方程式を数値的に解くことが可能である。

参考文献 1) 板野雄 六重照 「コンクリートの 2 次元クリープに関する理論的研究」

建築学会論文報告集 第 68 号 昭和 36 年 6 月。

2) C.A. Miller, S.A. Guralnick "Reinforced Concrete Beams Subjected to Repeated Load"

Journal of the Structural Division, Proceedings of the A.S.C.E. Oct. 1967.

3) N. Kh. Arutyunyan "Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures"

Pergamon Press 1966