

宮崎大学工学部 正員 太田俊昭

宮崎大学工学部 学生員 藤元安宏

I. 序言

P.C. 桁はコンクリート部に圧縮力を与えて、その引張抵抗を増大せしめ桁の曲げ耐力を著しく高めたもので、その合理性から今日土木建築構造用材として数多く用いられるようになってきた。

P.C. 桁の曲げ終極耐力に関する研究は数多いが亀裂を考慮したものは J.N. Kar, T. Paulay, R.C. Fenwick, I.O. Oladapo らによる基礎的研究等が見られるに過ぎない。本研究は軸力と曲げモーメントを同時に受ける場合の矩形断面P.C. 単純ばりの亀裂発生に伴う弾塑性有限変形挙動について解析を試み、その力学的諸特性について吟味考察せんとしたものである。

II. 基礎理論

(1) P.C. 初期応力分布;

初期引張応力度 σ_{pi} を受けるプレテンション部材の応力度は次式で求められる(図-1参照)。

$$\sigma_c = \frac{P_i}{A_e} + \frac{P_i}{I_e} e_p y \quad \text{----- (1)}$$

ただし A_e 換算断面面積, I_e 換算断面二次モーメント

e_p : 換算断面図心からのP.C. 鋼線の偏心率

$$P_i = A_p \times \sigma_{pai}, \quad A_e = A + (n-1)A_p$$

$$I_e = I + A_p g_e^2 + (n-1)A_p (e_k + g_e)^2$$

$$g_e = \frac{1}{A_e} (n-1)A_p e_k, \quad A = b \times h, \quad I = \frac{b}{12} h^3$$

A_p : P.C. 鋼線の断面積, n は断面諸量を規定する e_k, R, b は図-1参照のこと。

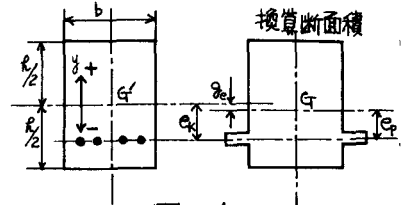


図-1

(2) コンクリートの乾燥収縮, クリープおよびP.C. 鋼線のリラクゼーションによる鋼線の引張応力度の減少; まずリラクゼーションを考慮した場合のP.C. 鋼線のアレストレス導入直後に及ぶ引張応力度 σ_{pt} は次式で与えられる。

$$\sigma_{pt} = \frac{(1-\gamma) \sigma_{pai}}{1 + n \frac{A_p}{A_c} \left(1 + \frac{e_k^2}{R^2}\right)} \quad \text{----- (2)}$$

ただし γ : リラクゼーションによる鋼線応力度の減少率, R : 断面二次半径

よって式(1)に式(2)を代入すればP.C. 鋼線位置でのコンクリートの導入圧縮応力度 σ_{cpt} が求められるゆえ、文献(4)よりクリープおよび乾燥収縮の影響を加味したP.C. 鋼線の引張応力度の減少量 σ_{par} が次式で与えられる。

$$\sigma_{par} = \frac{n\psi(\sigma_{ard} + \sigma_{cpt}) + E_p \epsilon_s}{1 + n \frac{\sigma_{cpt}}{\sigma_{pt}} \left(1 + \frac{e_k^2}{R^2}\right)}$$

ただし n : ヤング係数比, ψ : コンクリートのクリープ係数, σ_{ard} : P.C. 鋼線位置の静荷重曲げ応力度, E_p : P.C. 鋼線のヤング率, ϵ_s : コンクリートの乾燥収縮度

ゆえにP.C. 鋼線の有効引張応力度 σ_{pe} は次式で求められる。

$$\sigma_{pe} = \sigma_{pt} - \sigma_{par} \quad \text{----- (3)}$$

また その時上下縁のコンクリートの応力度は $P_i = P_e = A_p \times \sigma_{pe}$ において式(1)より次のようにえられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ce}^u &= \frac{P_e}{A_c} + \frac{P_e}{I_e} e_p y_u + \frac{M_{de}}{I_e} y_u \\ \sigma_{ce}^l &= \frac{P_e}{A_c} + \frac{P_e}{I_e} e_p y_l + \frac{M_{de}}{I_e} y_l \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4)}$$

ただし M_{de} : 自重によるモーメント, $\sigma_{ce}^u, \sigma_{ce}^l$: 上縁および下縁のコンクリート応力度

y_u, y_l : 中立軸より上縁・下縁までの距離

よってフレストレスによる初期応力度は次式で与えられ 結局図-2(b)のようになる。

$$\sigma_{ce} = \sigma_{ce}^u \cdot y / (R/2) + \sigma_{ce}^l \left\{ 1 - y / (R/2) \right\}$$

いまコンクリートおよび鋼線の応力-ひずみ曲線をそれぞれ図-3(a)および(b)のように理想化すれば 活荷重によるコンクリート応力度が最大限許容される範囲は図-2(c)のようになり また鋼線の弾性限界応力度は $\sigma_y - \sigma_{pe}$, さらに極限応力度は $\sigma_u - \sigma_{pe}$ となる。以上の諸条件を考慮すれば「コンクリートおよび鋼線の応力-ひずみ曲線式は次く」とき簡明な1次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{コンクリート} : \sigma &= \mu_c (\varepsilon - \varepsilon_c^0) \\ \text{鋼線} : \sigma &= \mu_p (\varepsilon - \varepsilon_p^0) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5)}$$

ただし μ, ε^0 は文献(6)のそれと同一内容である。

また この時の曲率 $\bar{\phi}$ は次式で求められる。

$$\bar{\phi} = \frac{n}{E_p} \left(\frac{\sigma_{ce}^u - \sigma_{ce}^l}{R} \right) \quad \text{--- (6)}$$

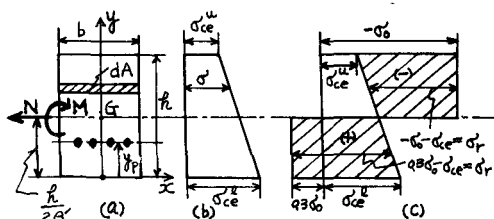


図-2

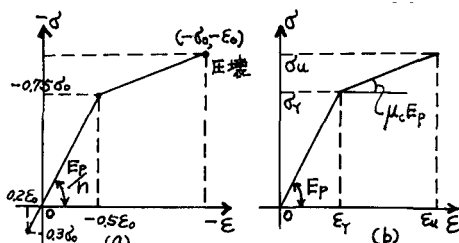


図-3

(3) 曲率の算定;

軸力 N と曲げモーメント M の組合わせ負荷を受ける PC 桁断面に働く外力と内力の釣り合い式は、一般に次式で与えられる (図-2(a)参照)。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int \sigma dA + A_p \sigma_p \\ M - \frac{R}{2\beta_1} N &= - \left(\int \sigma y dA + \sigma_p y_p A_p \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (7)}$$

ただし $\beta_1' = \frac{R}{2} / (\frac{R}{2} - g_c)$, σ_p : 鋼線の応力度, $\frac{R}{2\beta_1}$: 下縁より図心までの距離

式(7)式(5)を代入のうへ $\varepsilon = \varepsilon_c \left\{ 1 - y / (R/2) \right\} + \varepsilon_u \left\{ y / (R/2) \right\}$ を用いて変形すれば「台形公式より次式がえらる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{4R} \bar{N} &= a_1 \bar{\varepsilon}_l + a_2 \bar{\varepsilon}_u - a_3 \\ \frac{a_3}{4R} \bar{M} - \frac{3}{4R \beta_1} \bar{N} &= - (b_1 \bar{\varepsilon}_l + b_2 \bar{\varepsilon}_u - b_3) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (8)}$$

ただし $\bar{N} = N / \sigma_0 b R$, $\bar{M} = M / M_{yc} = \frac{M}{(b R^2 \sigma_0 (\beta_0 / 6))}$, $\bar{\varepsilon}_l = \varepsilon_l / \varepsilon_0$, $\bar{\varepsilon}_u = \varepsilon_u / \varepsilon_0$

$\varepsilon_l, \varepsilon_u$: 下縁および上縁のひずみ, $\beta_0 = (2\beta - 1) - 3(\beta - 1) \bar{y}_p$, $\beta = \left\{ 0.5 + \alpha_0 (1 - \bar{y}_p) \right\} / \left\{ 0.5 + \alpha_0 \bar{y}_p \right\}$

$\alpha_0 = n A_p / b R$

また $a_1 = \sum \left\{ \mu_{ci} (1 - \bar{y}_i) + \mu_{c(i+1)} (1 - \bar{y}_{i+1}) \right\} + \alpha (1 - \bar{y}_p)$

$a_2 = \sum \left\{ \mu_{ci} \bar{y}_i + \mu_{c(i+1)} \bar{y}_{i+1} \right\} + \alpha \bar{y}_p$

$a_3 = \sum \left\{ \mu_{ci} \bar{\varepsilon}_{ci} + \mu_{c(i+1)} \bar{\varepsilon}_{c(i+1)} \right\} + \alpha \bar{\varepsilon}_p$

$$b_1 = \sum \left\{ (3\bar{y}_i + 4\bar{R}\chi(1-\bar{y}_i))\mu_{c_i} + (3\bar{y}_i + 24\bar{R}\chi(1-\bar{y}_{i+1}))\mu_{c_{(i+1)}} \right\} + 3\alpha\bar{y}_p(1-\bar{y}_p)$$

$$b_2 = \sum \left\{ (3\bar{y}_i + 4\bar{R})\mu_{c_i}\bar{y}_i + (3\bar{y}_i + 24\bar{R})\mu_{c_{(i+1)}}\bar{y}_{i+1} \right\} + 3\alpha\bar{y}_p^2$$

$$b_3 = \sum \left\{ (3\bar{y}_i + 4\bar{R})\mu_{c_i}\bar{e}_{c_i}^0 + (3\bar{y}_i + 24\bar{R})\mu_{c_{(i+1)}}\bar{e}_{c_{(i+1)}}^0 \right\} + 3\alpha\bar{y}_p\bar{e}_p^0$$

ただし $\alpha = 2\mu_p \bar{A}_p / \bar{A}\bar{R}$, $y_p = \frac{R}{2} - e_p - g_e$, $\bar{y}_p = y_p / R$, $\bar{y} = y / R$

式(9)を $\bar{E}_k, \bar{E}_u$ について連立に解けば

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_k &= -G_1 - G_2 \bar{N} + G_3 \bar{M} \\ \bar{E}_u &= D_1 + D_2 \bar{N} - D_3 \bar{M} \end{aligned} \right\} \text{----- (9)}$$

ただし $G_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) / D_0$

$D_1 = (a_1 b_3 - a_3 b_1) / D_0$

$G_2 = (3a_2 - 2b_2 \beta_1') / D_0 \bar{A}\bar{R} \beta_1'$

$D_2 = (3a_1 - 2b_1 \beta_1') / D_0 \bar{A}\bar{R} \beta_1'$

$G_3 = 0.3 a_2 \beta_0 / \bar{A}\bar{R} \cdot D_0$

$D_3 = 0.3 a_1 \beta_0 / \bar{A}\bar{R} \cdot D_0$

$D_0 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

よって 軸力 N と曲げモーメント M が与えられるときに PC 断面に生ずる曲率は式(9)より次式で算定される。

$$\phi = \frac{E_0(\bar{E}_k - \bar{E}_u)}{R} = \frac{E_0}{R} \left\{ -G_1 - D_1 - (G_2 + D_2)\bar{N} + (G_3 + D_3)\bar{M} \right\}$$

(4) PC 単純ばりの補正エネルギー；

図-4(a)のごとく上反りした PC 単純ばりが 漸増集中荷重 $2P$ の作用を受ける場合 (図-4(b)参照) について考察すれば以下の通りである。

まず 単純ばりを適当な数 $2n_0$ に等分割し わね番目の分割部材に対して補正エネルギーを適用すれば次式が成立する。

$$C_k = \sum_{i=1}^n F_{k,i} U_{k,i} - U_k \text{----- (10)}$$

ただし $F_{k,i}$: 分割部材 k に働く一般力

$U_{k,i}$: $F_{k,i}$ に対応する変形成分

U_k : 分割部材 k のひずみエネルギー

よって ばり全体の補正エネルギー C は

$$C = \sum_k C_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n F_{k,i} U_{k,i} - \sum_{k=1}^n U_k \text{----- (11)}$$

さて 長さ ds の部材が図-5のとき外力を受けて最終平衡状態にあるものとする この時生ずるひずみエネルギーは

$$dU = \left(\int_{\phi} M d\phi + \int_{E_n} N dE_n \right) ds' \text{----- (12)}$$

ただし E_n : 図心点のひずみ

したがって わね番目の分割部材 ds に与えられる補正エネルギー dC は式(10)(12)より

$$dC = M_k \left\{ \theta_k - \bar{\theta}_k + \phi(1+E_n) \frac{ds}{2} \right\} - (M_k + dM_k) \left\{ -\theta_k + \bar{\theta}_k + \phi(1+E_n) \frac{ds}{2} \right\}$$

$$+ (V_k + dV_k) \left\{ (1+E_n) ds \sin \theta_k - ds \sin \bar{\theta}_k \right\} + (H_k + dH_k) \left\{ (1+E_n) ds \cos \theta_k - ds \cos \bar{\theta}_k \right\}$$

$$- \left(\int_{\phi} M d\phi + \int_{E_n} N dE_n \right) (1+E_n) ds \text{----- (13)}$$

ただし H_k, V_k : 分割部材 k に働く水平力および鉛直反力, θ_k : 変形後の分割部材 k の軸方向と水平軸とのなす角, $\bar{\theta}_k$: 無載荷時の分割部材 k の軸方向と水平軸とのなす角

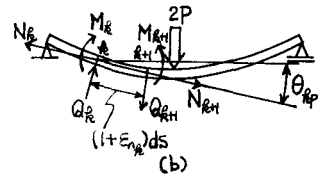
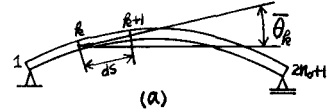


図-4

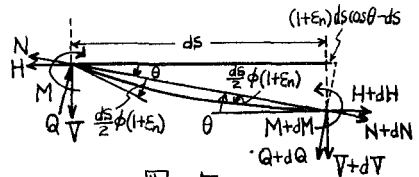


図-5

よって、PC単純はり全体の補正エネルギーCは次式で与えられる。

$$C = \sum_{k=0}^n \int_0^{\lambda} \phi(1+\epsilon_n) dM ds - \sum_{k=0}^n \int_0^{\lambda} \frac{dM}{ds} (\theta_k - \bar{\theta}_k) ds + \sum_{k=0}^n \int_0^{\lambda} \epsilon_n dN ds + \sum_{k=0}^n \int_0^{\lambda} \bar{V}_k (\sin \theta_k - \sin \bar{\theta}_k) ds + \sum_{k=0}^n \int_0^{\lambda} H_k (\cos \theta_k - \cos \bar{\theta}_k) ds \quad (14)$$

よって、式(14)のCに変分原理を適用して分割部材におけるたわみ角の連続条件式を求めれば、同定未知交角 θ_k を決定する式が次のようにえられる。

$$\frac{\partial C}{\partial M_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, 2n_0+1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial M_k} = \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial C_i}{\partial M_k} = \sum_{i=1}^{10} \left[\int_0^{\lambda} \left\{ \phi_k (1+\epsilon_n) \frac{\partial M_i}{\partial M_k} \right\} ds - \int_0^{\lambda} \left\{ \frac{\partial M_i}{\partial M_k} \left(\frac{dM_i}{ds} \right) \theta_i \right\} ds \right] = 0 \quad (15)$$

構造物の対称条件を考慮したうえで式(15)を変形すれば次式をうる。

$$\theta_{k-1} = \theta_k + (\bar{\theta}_{k-1} - \bar{\theta}_k) + XJ(k) + XJ(k-1) \quad (k=1, \dots, 6) \quad (16)$$

$$\theta_6 = -\theta_5 = -\frac{1}{2} \{ (\bar{\theta}_5 - \bar{\theta}_6) + (XJ(5) + XJ(6)) \}$$

$$\text{ただし } XJ(k) = \frac{\lambda}{6} [\phi_k (1+\epsilon_n) + (\phi_k + \phi_{k+1})(1+0.5\epsilon_n + 0.5\epsilon_{n+1})]$$

$$XJ(k-1) = \frac{\lambda}{6} [\phi_k (1+\epsilon_n) + (\phi_k + \phi_{k-1})(1+0.5\epsilon_n + 0.5\epsilon_{n-1})]$$

一方、各分割部材に働く諸力は図-4(b)の載荷条件に対して次式を満足しなければならない。

$$Q_k = P_k \cos \theta_k$$

$$N_k = P_k \sin \theta_k$$

$$dM_k - Q_k (1+\epsilon_n) ds = 0 \quad (k=1, 2, \dots, 2n_0+1) \quad (17)$$

上記諸導諸式を併用すれば、くり返し試算によってPC単純はりの亀裂を考慮した弾塑性挙動が解明でき、そのフローチャートを図-6に示す。なお計算例については講演当日その詳細を説明する。

III. 結 語

本研究の結果、任意の軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受けるPC単純はりの弾塑性有限変形挙動が龍骨材を用いることにより、弾性限界より崩壊に至るまで逐次追跡解明することが可能となったが、本法を拡張すれば同様の手法により連続はりおよびラーメンなどを解析することも可能となる。なお、本研究は文部省科学研究費の援助を受けたことを記し、ここに謝意を表する。

(参考文献)

- (1) J.N.Kar: Diagonal Cracking in Prestressed Concrete Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of the A.S.C.E., Oct. 1968
- (2) R.C.Fenwick and Thomas Paulay: Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of the A.S.C.E. Jan. 1968
- (3) I.O.Oladapo: Stability of Tensile Grades in Prestressed Concrete Beams, Journal of the Structural Division, Proc. of the A.S.C.E. Jan. 1969
- (4) 猪股俊司: フレストレスト・コンクリートの設計および施工, 技報堂
- (5) 佐伯俊一: フレストレスト・コンクリート橋, 理工図書
- (6) 山崎太田: "有限変形理論によるR.C.および合成桁の弾塑性解析" 橋梁構造工学研究発表会論文集, 昭和44年12月

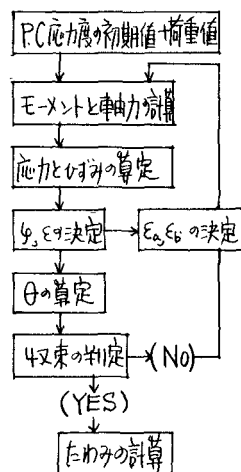


図-6