

宮崎大学工学部 正 員 太田俊昭

" " " " 藤瀬 勉

" " 学生員 〇田能孝孝二郎

1 序言

一般にコンクリートの物理的特性は、弾性、塑性および粘性の3要素によって与えられ、コンクリート固有の曲げ亀裂およびせん断亀裂は塑性に、また応力緩和ならびに Creep 現象は粘性に、それぞれ起因することが知られている。したがって RC および PC 桁の応力と変形を厳密に算定するには、当然これらの3要素を考慮したレオロジカル解析手法に依らなければならない。

しかしながら著者らの知る限りではこのような粘弾塑性理論による RC および PC 桁の解析法は確立されておらず、最近に至ってようやくその前段階としての応力-ひずみ曲線に関するレオロジ-的考察が横道¹⁾、大田²⁾、藤瀬³⁾ および大岸³⁾ によって行われ、たにすぎない。

本研究は上記鉄筋コンクリート桁の粘弾塑性解析法の確立を目的とするもので、その基礎段階としてまず *Boltzmann* の基礎的方程式を拡張適用して、コンクリートの応力-ひずみ曲線式を誘導し、次いで単鉄筋矩形断面のコンクリートはりに対する変形ならびに応力を、粘性を考慮した弾塑性補正エネルギー法に基づいて解析しうるべく試みたものである。

2 応力-ひずみ曲線

通常塑性計算に際しては、コンクリートの応力-ひずみ曲線式として、2本の折線が2次曲線であるいは実験公式などで近似したものを使用している。

周知のようにコンクリートの力学的挙動は応力緩和や Creep など、前記受けを力学的採用の影響を受け、時間効果の入った余効現象、換言すれば、ひろい意味での記憶現象を示すことが知られている。そこで本研究では、コンクリートの応力-ひずみに関して、次の仮定を設けるものとする。すなわち、過去のある時刻 t' に力を受けて生じたひずみ $\epsilon(t')$ が現在の応力 $\sigma(t)$ に及ぼす程度は

i) $\epsilon(t')$ が大きい程 ii) その加えた時間 dt が長い程

iii) このような変形を受けてから後の時間がたっているほど大きくなる。

これより次式が一般的に成立する。

$$\sigma(t) = E(t) \epsilon(t) - \int_{-\infty}^t f(t-t') \epsilon(t') dt' \quad \text{----- (1)}$$

ただし $\sigma(t)$, $\epsilon(t)$: 時刻 t の応力とひずみ, $E(t)$: 時刻 t のヤング率,

f : 単調減少函数

ここで、 f を記憶函数とすれば、式(1)は *Boltzmann* の基礎方程式となる。さて記憶函数 $f(t-t')$ を式(2)のように仮定すれば

$$f(t-t') = \frac{E(t')}{\tau_1} e^{-(t-t')/\tau_1} \quad \text{----- (2)} \quad \text{ただし } \tau_1 \text{ は緩和時間とする。}$$

式(1)に次のような Laplace 積分の形で与えられる。

$$\sigma(t) = E(t) \epsilon(t) - \int_{-\infty}^t \frac{E(t')}{\tau_1} \epsilon(t') e^{-(t-t')/\tau_1} dt' \quad \text{----- (3)}$$

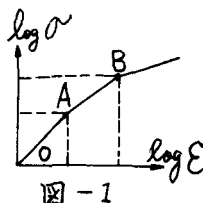


図-1

一般に破壊によるコンクリートの応力-ひずみ曲線を対数グラフで示せば実験結果より図-1のようになる。この折線となる。

よって $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ および $\overline{BC}$ 区間をそれぞれ弾性・弾塑性および塑性領域と定義し、各区間の塑性率および粘性率を一定とすれば、時間間隔 Δt で一定の漸増負荷を行なう場合には式(3)は次のように変形される。

すなわち時刻 t の粘性率を $\eta(t)$ とすれば文献(4)より

$$E(t)/\eta(t) = 1/\zeta_1(t) \quad \text{----- (4)}$$

上式を右辺に、無次元化定数 $\alpha(t)$ を導入することにより次式をうる。

$$\sigma(t) = E(t)/\eta(t) = t_0/\zeta_1(t) \quad \text{----- (5)}$$

式(3)(5)より

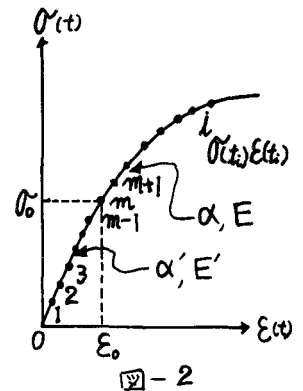
$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \alpha(t') E(t') \varepsilon(t') e^{-\frac{\alpha(t-t')}{t_0}} dt'.$$

ここで $t/t_0 = \bar{t}$, $t'/t_0 = \bar{t}'$ および $\varepsilon(t) = 0$ ($t \leq 0$) とおけば上式は

$$\sigma(\bar{t}) = E(\bar{t})\varepsilon(\bar{t}) - \int_0^{\bar{t}} \alpha(\bar{t}') E(\bar{t}') \varepsilon(\bar{t}') e^{-\alpha(\bar{t}-\bar{t}')} d\bar{t}' \quad \text{----- (6)}$$

式(6)を台形公式を用いて書き改めれば「弾塑性領域」では図-2より

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{t}_i) = & E(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_i) - \alpha \{ E(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_i) e^{-\alpha(\bar{t}_i-1)} + E'(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_i) e^{-\alpha(\bar{t}_i-2)} \\ & + E'(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_i) e^{-\alpha(\bar{t}_i-m)} \} - \alpha \{ E(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_{i-1}) e^{-\alpha(\bar{t}_i-m-1)} \\ & + \frac{1}{2} E(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_i) e^{-\alpha(\bar{t}_i-1)} \} \\ & , (i = m+1, \dots) \end{aligned}$$



ここに $\sigma'(\bar{t}_m)$, $\varepsilon(\bar{t}_m)$ はそれぞれ弾性限界時の応力とひずみ α_0 , ε_0 に相当する。また $i (= 1, 2, \dots)$ は、時刻 t_i を表わすものとする。 α' , E' : α , E : 弾性域および塑性域の α 値およびヤング係数

$$\sigma'(\bar{t}_i) = E(\bar{t}_i)\varepsilon(\bar{t}_i)(1+\frac{\alpha}{2}) - \alpha E' \sum_{k=1}^m \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha'(\bar{t}_i-k)} - \alpha E \sum_{k=m+1}^i \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha(\bar{t}_i-k)} \quad \text{----- (7)}$$

同様に

$$\sigma'(\bar{t}_{i-1}) = E(\bar{t}_{i-1})\varepsilon(\bar{t}_{i-1})(1+\frac{\alpha}{2}) - \alpha' E' \sum_{k=1}^m \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha'(\bar{t}_{i-1}-k)} - \alpha E \sum_{k=m+1}^{i-1} \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha(\bar{t}_{i-1}-k)} \quad \text{----- (8)}$$

式(7), (8)より $\sum_{k=m+1}^i \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha(\bar{t}_i-k)}$ を消去すれば

$$\sigma'(\bar{t}_i) = E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon(\bar{t}_i) + \{ \sigma'(\bar{t}_{i-1}) - E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon(\bar{t}_{i-1}) \} e^{-\alpha} - \alpha' E' (1 - e^{-(\alpha-\alpha')}) \sum_{k=1}^m \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha(\bar{t}_i-k)} \quad \text{----- (9)}$$

一方弾性限界時の応力 σ_0 は式(6)より次式で与えられる。

$$\sigma_0 = E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon_0 - \alpha E' \sum_{k=1}^m \varepsilon(\bar{t}_k) e^{-\alpha'(\bar{t}_i-m-k)} \quad \text{----- (10)}$$

式(9)に式(10)を代入のうえ整理すれば結局弾塑性式での $\sigma'(\bar{t}_i)$ が次のように与えられる。

$$\sigma'(\bar{t}_i) = E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon(\bar{t}_i) + \{ \sigma'(\bar{t}_{i-1}) - E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon(\bar{t}_{i-1}) \} e^{-\alpha} + (1 - e^{-(\alpha-\alpha')}) \{ \sigma_0 - E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon_0 \} e^{-\alpha(\bar{t}_i-m)} \quad \text{----- (11)}$$

式(11)が、弾性域および弾塑性域のヤング率, α および E' , α' および E , α とした場合の応力-ひずみ曲線式である。

なお、コンクリートの α 値は極めて小さく $e^{-(\alpha-\alpha')} \approx 10$ となるゆえ、式(11)は近似値は次のように書き改められる。

$$\sigma'(\bar{t}_i) = E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon(\bar{t}_i) + \{ \sigma'(\bar{t}_{i-1}) - E(1+\frac{\alpha}{2})\varepsilon(\bar{t}_{i-1}) \} e^{-\alpha} \quad \text{----- (12)}$$

すなわち、式(12)は Maxwell の力学モデルより求められる応力-ひずみ曲線式と合致することが、

わかる。

3. 曲率の算定

前節の考察結果よりコンクリートの応力-ひずみ曲線は一般に次のように表示される。

$$\sigma(x) = \nu(x) \varepsilon(x) + f_c(\varepsilon(x)) \quad (13)$$

ただし、 $\nu(x)$: コンクリートのヤング率に相当する (例えば、弾塑性域では $E(1-\frac{\sigma}{\sigma_c})$)

$f_c(\varepsilon(x))$ 補正定数 (例えば、弾塑性域では式(11)のオ2, 3項に相当する)

一方、鉄筋の応力-ひずみ曲線は文献(5)より

$$\sigma(x_i) = \nu_s(x) \varepsilon(x) + f_s(\varepsilon(x)) \quad (14)$$

ただし $\nu_s(x)$: 鉄筋のヤング率, $f_s(\varepsilon(x))$ 補正定数

さて断面に働くモーメントを $M(x)$ とすれば、平衡条件式より次の2式が成立する。

$$M(x) = - \int_{A_0} \sigma(x) y \, dA_0 \quad (15)$$

$$0 = - \int_{A_0} \sigma(x) \, dA_0 \quad (16)$$

ただし A_0 : 断面積

中立軸の位置を $\xi(x)$ とすれば、曲率 $\phi(x)$ を用いてひずみ $\varepsilon(x)$ が次のようにえられる。

$$\varepsilon(x) = \phi(x) (\xi(x) - y) \quad (17)$$

式(15)(16)に式(13), (14)を代入のうえ整理すれば

$$M(x) = - \phi(x) \xi(x) \sum_j \nu_j(x) y \, dA_0 + \phi(x) \sum_j \nu_j(x) y^2 dA_0 - \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) y \, dA_0 \quad (18)$$

$$0 = - \phi(x) \xi(x) \sum_j \nu_j(x) \, dA_0 + \phi(x) \sum_j \nu_j(x) y \, dA_0 - \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) \, dA_0 \quad (19)$$

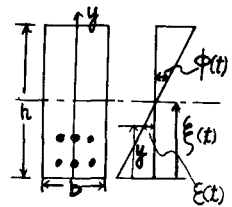


図-3

ただし、 $j = C$ あるいは S で添字 C, S はそれぞれコンクリートおよび鉄筋を意味する

式(18), (19)より $\phi(x)$, $\xi(x)$ を消去したうえで $\phi(x)$ を求めれば次のようにえられる。

$$\frac{- \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y \, dA_0}{\sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) \, dA_0} \left\{ \phi(x) \sum_j \nu_j(x) y \, dA_0 - \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) \, dA_0 \right\} + \phi(x) \sum_j \nu_j(x) y^2 dA_0 - \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) y \, dA_0 = M(x)$$

よって所要の曲率算定式は次式で求められる。

$$\phi(x) = \frac{M(x) + \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) y \, dA_0 - wh \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) \, dA_0}{\sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y \, dA_0 - wh \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y \, dA_0} = a(x) M(x) + b(x) \quad (20)$$

ただし $w = \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y \, dA_0 / h \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) \, dA_0$

h : 断面の高さ

$$a(x) = 1 / \left\{ \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y^2 dA_0 - wh \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y \, dA_0 \right\}$$

$$b(x) = \left\{ \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) y \, dA_0 - wh \sum_j \int_{A_0} f_j(\varepsilon(x)) \, dA_0 \right\} / \left\{ \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y^2 dA_0 - wh \sum_j \int_{A_0} \nu_j(x) y \, dA_0 \right\}$$

4. 補正エネルギー

曲げモーメントを受ける R.C 桁の補正エネルギーは文献(5)より次式で与えられる。

$$C(x) = \iint \phi(x) \, dM(x) \, ds \quad (21)$$

ただし ds : 桁の微少の長さ,

いま、桁に働く一般力を $F(x)$ とし それに対応する変形成分を $u(x)$ とすれば "Complementary

Minimum Principle" より次式が成立する。

$$\text{すなわち} \quad u(x) = \frac{\partial C(x)}{\partial F(x)} = \frac{\partial C(x)}{\partial M(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F(x)} = \int_S \phi(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F(x)} \cdot ds \quad (22)$$

一方、桁の作用点の曲げモーメント $M(x)$ は外力 $P_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) によって次のように一般表示される。

$$M(x) = \sum \lambda_i P_i(x) + M^*(x)$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{\partial M(x)}{\partial P_i} = \lambda_i \quad (23)$$

ただし λ_i : 定数 $M^*(x)$: 不確定モーメント

式(22), (20), (23)を代入し $F(x) = P_i(x)$ とおけば、結局、変形成分 $u_i(x)$ が次のようにえられる。

$$u_i(x) = \int_S \{a(x) M(x) + b(x) \lambda_i\} ds \quad (24)$$

5. 解法

上記誘導諸式を用いれば、R.C. 桁の応力および変形の粘弾塑性解析が可能となる。

すなわち 手荷重 $P_i(x)$ による曲げモーメント $M(x)$ が式(23)のように与えられるゆえ、式(20)にこれを代入し、かつ $\gamma(x)$ および $f(\varepsilon(x))$ として前の時刻のそれぞれの値を用いれば、曲率 $\phi(x)$ の第一近似値が算定可能となる。

よって 式(17)よりひずみ $\varepsilon(x)$ がえられるゆえ $\gamma(x)$ および $f(\varepsilon(x))$ も自動的に求められる。

再び式(20)に これらの値を代入し、曲率 $\phi(x)$ の第二近似値を算出する。この操作を繰り返し行ない収束に至れば、最終的に $a(x)$ および $b(x)$ が決定され、従って式(23)より手荷重による変形成分が算定されることとなる。

6. 結び

本研究の結果、鉄筋コンクリート桁の粘弾塑性挙動に対するレオロジック解析方法が与えられた。

すなわち Baltzmann の基礎方程式に基づいた応力-ひずみ曲線式を式(11)および(12)のように導くことにより、粘性を考慮した弾塑性補正エネルギー $C(x)$ が式(21)で算出されるゆえ、電算機によるかかる構造物の応力ならびに変形の粘弾塑性解析に関する基礎理論が確立されたと言える。

(参考文献)

- 1) 横道 コンクリート変形のレオロジック考察, セメント技術年報 昭和39年
- 2) 大田, 藤瀬: 鉄筋コンクリートはりの粘弾塑性解析(初報), 宮崎大学工学部研究報告, 第16号
- 3) 大岸: コンクリートの遅延時間分布関数の精度解析, 日本建築学会大会学術講演概集, 昭和43年
- 4) M Reimer レオロジックの基礎理論, コロナ社
- 5) 山崎, 大田 有限変形理論によるRCおよび合成桁の弾塑性解析, 第16回橋梁構造工学研究発表会

昭和44年12月