

宮崎大学工学部 正員 木田俊昭

宮崎大学工学部 学生員・植木 浩

1. 序言

漸増過大荷重による鉄筋コンクリートばりの曲げ破壊は、曲げ亀裂とせん断亀裂の進行によって桁全体の耐力が著しく低下し、最終的にコンクリート圧縮部分が圧壊もしくは、せん断破壊する形で生じることが一般的に知られている。

本研究は、かかる亀裂の曲げ剛性に及ぼす影響を解明するため、矩形断面片持ばりを例に取り、Mohrの破壊条件式を導入して、曲げとせん断応力の組み合わせ応力によるコンクリート部の斜引張亀裂の発生を追跡し、補正エネルギー法を用いて破壊に至るまでの不連続的な曲げ剛性の低減と塑性挙動の推移を明らかにせんとしたものである。

2. 基礎理論

(1) 応力-ひずみの算定

鋼材の応力-ひずみ曲線を図-1に示すBilinear型の折線で理想化すれば、応力 σ_s はひずみ ϵ_s の1次式で表わされる。

$$\sigma_s = \mu'_s (\epsilon_s - \epsilon_s^0) \quad \text{----- (1)}$$

ただし、 σ_s 、 ϵ_s ；鋼材の応力およびひずみ

μ'_s 、 ϵ_s^0 ；定数(文献(1)参照)

一方、コンクリートの応力-ひずみ曲線式は、一般に式(2)で与えられるが(図-2(a)参照)、本研究では $f(\epsilon_c) = -\mu'_c \epsilon_c^0 = \text{定数}$ なる1次式を採用するものとする(図-2(b)参照)。

$$\sigma_c = \mu'_c \epsilon_c + f(\epsilon_c) \quad \text{----- (2)}$$

$$\sigma_c = \mu'_c \epsilon_c - \mu'_c \epsilon_c^0 = \mu'_c (\epsilon_c - \epsilon_c^0) \quad \text{----- (3)}$$

ただし、 σ_c 、 ϵ_c はコンクリートの応力およびひずみ、

μ'_c 、 ϵ_c^0 ；定数(文献(1)参照)

ここで、 $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ 、 $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$ を用いて式(1)、(3)を無次元すれば、それぞれ

$$\bar{\sigma}_s = \mu'_s (\bar{\epsilon}_s - \bar{\epsilon}_s^0) \quad \text{----- (4)}$$

$$\bar{\sigma}_c = \mu'_c (\bar{\epsilon}_c - \bar{\epsilon}_c^0) \quad \text{----- (5)}$$

ただし、 $\mu'_s = \mu'_s \epsilon_0 / \sigma_0$ 、 $\mu'_c = \mu'_c \sigma_0 / \epsilon_0$ 、 $\bar{\epsilon}_s^0$ 、 $\bar{\epsilon}_c^0$ は表-1、表-2に示すとき定数、 σ_0 、 ϵ_0 ；コンクリートの圧縮極限応力およびひずみ、 σ_{ys} 、 ϵ_{ys} ；鋼材の降伏応力およびひずみ

さて、桁の断面の上縁および下縁のひずみをそれぞれ ϵ_u および ϵ_l と

し、平面保持の法則を仮定すれば任意点 k のひずみ ϵ_k は図-3より次式で与えられる。

$$\bar{\epsilon}_k = (1 - \bar{y}_k / \bar{y}_h) \left(\frac{\bar{\epsilon}_l}{\bar{\epsilon}_u} \right) \quad \text{----- (6)}$$

ただし、 $\bar{y}_k = y_k / h$ 、 $\bar{\epsilon}_l = \epsilon_l / \epsilon_0$ 、 $\bar{\epsilon}_u = \epsilon_u / \epsilon_0$ 、 $\bar{y}_h = \epsilon_h / \epsilon_0$ 、 y_k ；下縁より任意点 k までの距離、 h ；桁高

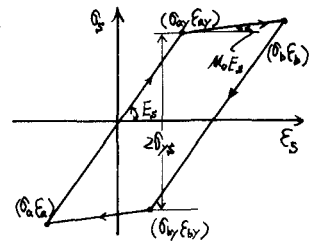


図-1

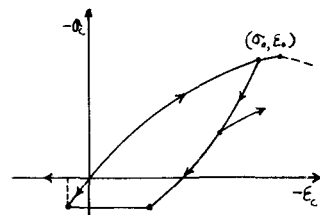


図-2(a)

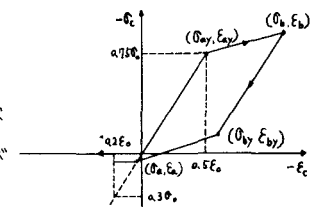


図-2(b)

よって任意点 k の応力は、式(4)、式(5)に式(6)を代入することより次のようにえられる。

$$\bar{\sigma}_{sk} = (\mu_{sk}(1 - \bar{y}_k), \mu_{sk} \bar{y}_k) \left(\frac{\bar{\epsilon}_k}{\bar{\epsilon}_u} \right) - \mu_{sk} \bar{\epsilon}_{sk}^0 \quad \text{----- (7)}$$

$$\bar{\sigma}_{ck} = (\mu_{ck}(1 - \bar{y}_k), \mu_{ck} \bar{y}_k) \left(\frac{\bar{\epsilon}_k}{\bar{\epsilon}_u} \right) - \mu_{ck} \bar{\epsilon}_{ck}^0 \quad \text{----- (8)}$$

(2)、せん断応力の算定

せん断応力では理論的には二次元応力場の平衡条件より垂直応力 σ を用いて、式(9)を算定しうる。

$$\tau = - \int_0^y \left(\frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \right) dy \quad \text{----- (9)}$$

すなわちでは垂直応力 σ の材軸方向の変化 $\Delta \sigma / \Delta x$ によつて求められることとなるが、本法によれば σ 自身が各断面でくり返し試算によつて決定されるため、収束に至る途中の演算で(特に亀裂を伴うような場合に)著しく誤差が累積し、結果的に正解値がえられない場合が生ずる。一般に鉄筋コンクリートのせん断応力分布は、曲げ亀裂が生じた場合も含み図-3のように与えられるゆえ、ここではせん断応力 τ の算定式を式(9)に代る下記の式で近似することにする。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau_s \left\{ 1 - \left(\frac{y_0 - y}{y_0} \right)^2 \right\}, & 0 \leq y \leq y_0 \\ \tau &= \tau_s, & y_0 \leq y \leq y_1 \\ \tau &= 0, & y_1 < y < h \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (10)}$$

ただし、 τ_s ；中立軸でのせん断応力

よつて、せん断力 Q は、式(10)より次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} Q &= \int_{y_0}^{y_1} \tau_s dA + \int_0^{y_0} \tau dA = \tau_s \int_{y_0}^{y_1} b dy + \tau_s \int_0^{y_0} \left\{ 1 - \left(\frac{y_0 - y}{y_0} \right)^2 \right\} b dy \\ &= b \cdot \tau_s \cdot \left(y_1 - \frac{1}{3} y_0 \right) \end{aligned} \quad \text{ただし、} b \text{；断面巾、} y_1 \text{；せん断亀裂の発生位置}$$

$$\text{ゆえに、} \tau_s = \frac{Q}{b \cdot (y_1 - \frac{1}{3} y_0)} = \frac{Q}{b \cdot h \cdot (\bar{y}_1 - \frac{1}{3} \bar{y}_0)} \quad \text{----- (11)}$$

ここに、 $\bar{y}_0$ 、 $\bar{y}_1$ は式(6)において $\bar{\epsilon} = 0$ および 0.2 において次式で求められる。

$$\bar{y}_0 = \bar{\epsilon}_x / (\bar{\epsilon}_x - \bar{\epsilon}_u), \quad \bar{y}_1 = (0.2 - \bar{\epsilon}_x) / (\bar{\epsilon}_u - \bar{\epsilon}_x) \quad \text{----- (12)}$$

次に、圧縮応力とせん断応力の組み合わせ負荷による降伏条件式は、Mohrの破壊条件式より次の式で与えられる。 $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\bar{\sigma}} = \frac{(1 + \alpha) \sqrt{\alpha}}{2\alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{(\bar{\sigma} + (1 - \alpha)/2)^2}{((1 + \alpha)/2)^2}} \quad \text{----- (13)}$

$$\text{ただし、} \bar{\tau} = \frac{\sigma_{ot} \cdot (-\sigma_o)}{\sigma_{ot} + (-\sigma_o)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot (-\sigma_o), \quad \alpha = \left| \frac{\sigma_{ot}}{(-\sigma_o)} \right| \quad \text{ただし、} \sigma_{ot} \text{；曲げ亀裂発生時の引張応力}$$

式(13)を変形して、

Step	Range	M_s	$\bar{\epsilon}_s^0$
1	$\bar{\epsilon}_a < \bar{\epsilon}_s \leq \bar{\epsilon}_{ay}$	E_s	$\bar{\epsilon}_a - \bar{\sigma}_a / E_s$
2	$\bar{\epsilon}_{ay} < \bar{\epsilon}_s \leq \bar{\epsilon}_b$	$M_s E_s$	$\bar{\epsilon}_{ay} - \bar{\sigma}_{ay} / M_s E_s$
3	$\bar{\epsilon}_w \leq \bar{\epsilon}_s < \bar{\epsilon}_b$	E_s	$\bar{\epsilon}_b - \bar{\sigma}_w / E_s$
4	$\bar{\epsilon}_a \leq \bar{\epsilon}_s < \bar{\epsilon}_w$	$M_s E_s$	$\bar{\epsilon}_{by} - \bar{\sigma}_w / M_s E_s$
$\bar{\epsilon}_{ay} = \bar{\epsilon}_a + 2.0, \bar{\epsilon}_w = \bar{\epsilon}_b - 2.0$			
$\bar{\sigma}_w = \bar{\sigma} + 2.0, \bar{\sigma}_b = \bar{\sigma}_a - 2.0$			

表-1

Step	Range	$\bar{\epsilon}_s$	M_s
1	$\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\epsilon}_b$	$\bar{\epsilon}_{ay} - \bar{\sigma}_{ay} / 0.5$	0.5
2	$\bar{\epsilon}_b < \bar{\epsilon}_s \leq \bar{\epsilon}_{by}$	$\bar{\epsilon}_b - \bar{\sigma}_b / 1.5$	1.5
3	$\bar{\epsilon}_s \leq \bar{\epsilon}_a$	$\bar{\epsilon}_{by} - \bar{\sigma}_{by} / 0.5$	0.5
4	$\bar{\epsilon}_{ay} < \bar{\epsilon}_s < \bar{\epsilon}_a$	$\bar{\epsilon}_a - \bar{\sigma}_a / 1.5$	1.5
5	$\bar{\epsilon}_a \leq \bar{\epsilon}_s \leq 0.2$	0	0
6	$0.2 < \bar{\epsilon}_s$	0	0
$\bar{\epsilon}_{ay} = \bar{\epsilon}_a - 0.54 = \bar{\epsilon}_b, \bar{\epsilon}_{by} = \bar{\epsilon}_b + 0.54 = \bar{\epsilon}_a, \bar{\epsilon}_{ty} = 0.3$			

表-2

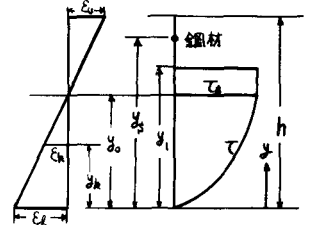


図-3

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{(-\bar{\epsilon}_0)} = \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}_0} \cdot \frac{\bar{\epsilon}_0}{(-\bar{\epsilon}_0)} = \bar{\epsilon} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(\bar{\epsilon} + (1-\alpha)/2)^2}{((1+\alpha)/2)^2}} \quad \text{----- (14)}$$

$$\text{すなわち、降伏条件； } \bar{\epsilon} \geq (\alpha/4) \cdot \{1 - (\bar{\epsilon} + (1-\alpha)/2)^2 / ((1+\alpha)/2)^2\} \quad \text{----- (15)}$$

を満足する場合に、せん断亀裂が発生するとみなすことができる。

(3)、曲率の算定

桁断面での内力と外力とのつり合い条件より任意の応力状態における M と N が次の一般式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_0^h \sigma_c dA + \Sigma \sigma_s A_s \\ M - \beta h/2 &= - \left(\int_0^h \sigma_c y dA + \Sigma \sigma_s y_s \cdot A_s \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (16)}$$

ただし、 dA ；微小面積、 βh ；純曲げが働く場合の中立軸より下縁までの距離

式(17)、(8)を式(14)に代入のうへ $\bar{N} = N/M_0$ 、 $\bar{M} = M/M_0$ なる無次元化を行えば、結局次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \sigma_0 \int_0^h \mu_{ck} \{ \bar{y}_k (\bar{\epsilon}_v - \bar{\epsilon}_\ell) + \bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_{ck}^0 \} dA + \sigma_0 \Sigma \mu_{sk} \{ \bar{y}_k (\bar{\epsilon}_v - \bar{\epsilon}_\ell) + \bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_{sk}^0 \} A_s \\ \bar{M} - \beta h/2 &= - \left(\sigma_0 h \int_0^h \mu_{ck} \{ \bar{y}_k (\bar{\epsilon}_v - \bar{\epsilon}_\ell) + \bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_{ck}^0 \} y dA + \sigma_0 h \Sigma \mu_{sk} \{ \bar{y}_k (\bar{\epsilon}_v - \bar{\epsilon}_\ell) + \bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_{sk}^0 \} y_s \cdot A_s \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (17)}$$

ただし、 M_0, N_0 ；無次元化のための基準モーメントおよび軸力、 $\bar{y}_s = y_s/h$ 、 A_s ；鋼材の断面積
 y_s ；下縁より鋼材までの距離

ここで断面形を $h \times b$ の矩形断面とし、無次元化に必要な M_0 および ϕ_0 をそれぞれ桁上縁の亀裂発生時の曲げモーメント M_{rc} および曲率 ϕ_{rc} とすれば、弾性計算より M_{rc} および ϕ_{rc} がそれぞれ次の式で求められる。
 $M_0 = M_{rc} = \sigma_0 b h^2 \beta_0 / 6$ 、 $\phi_0 = \phi_{rc} = \sigma_0 \beta_1 / (h E_c)$ ----- (18)

ただし、 $\beta_0 = 0.3 + 2\bar{\epsilon}_1 + 6E_s(A_s/A_0) \cdot \bar{y}_s \{ (1-\bar{y}_s)\bar{\epsilon}_1 + 0.3\bar{y}_s \} / (E_c b h) - 0.24(2+\bar{y}_s)(1-\bar{y}_s)$
 $\bar{y}_2 = (0.06 - \bar{\epsilon}_1) / (0.3 - \bar{\epsilon}_1)$ 、 $\beta_1 = (0.3 - \bar{\epsilon}_1)$ 、 A_0 ；断面積、 $\alpha = E_s(A_s/A_0) / E_c$
 $\bar{\epsilon}_1$ ； $\{0.5 + \alpha(1-\bar{y}_s)\bar{\epsilon}_1 + 0.3(0.5 + \alpha\bar{y}_s) - 0.12(1-\bar{y}_s) = 0$ を満足する下縁の応力

さて式(17)は、 μ 、 $\bar{\epsilon}$ が断面内の各点で異なる値となるゆえ、直接積分不可能となる。このため断面を N 等分し、台形公式を用いて近似積分を行えば 結局式(17)は下記のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} 2/\alpha h \cdot \bar{N} &= A_1 \bar{\epsilon}_\ell + A_2 \bar{\epsilon}_v - A_3 \\ -\beta_0/\alpha h \cdot \bar{M} + 3/(\alpha h \cdot \beta) \cdot \bar{N} &= B_1 \bar{\epsilon}_\ell + B_2 \bar{\epsilon}_v - B_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (19)}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} A_1 &= \sum_{k=1}^N \{ \mu_{ck}(1-\bar{y}_k) + \mu_{c(k+1)}(1-\bar{y}_{(k+1)}) \} + \alpha(1-\bar{y}_s) \\ A_2 &= \sum_{k=1}^N \{ \mu_{ck} \bar{y}_k + \mu_{c(k+1)} \bar{y}_{(k+1)} \} + \alpha \bar{y}_s \\ A_3 &= \sum_{k=1}^N \{ \mu_{ck} \bar{\epsilon}_{ck}^0 + \mu_{c(k+1)} \bar{\epsilon}_{c(k+1)}^0 \} + \alpha \bar{\epsilon}_s^0 \\ B_1 &= \sum_{k=1}^N \{ \mu_{ck}(3\bar{y}_k + \alpha h)(1-\bar{y}_k) + \mu_{c(k+1)}(3\bar{y}_k + 2\alpha h)(1-\bar{y}_{(k+1)}) \} + 3\alpha \bar{y}_s(1-\bar{y}_s) \\ B_2 &= \sum_{k=1}^N \{ \mu_{ck}(3\bar{y}_k + \alpha h) \bar{y}_k + \mu_{c(k+1)}(3\bar{y}_k + 2\alpha h) \bar{y}_{(k+1)} \} + 3\alpha \bar{y}_s^2 \\ B_3 &= \sum_{k=1}^N \{ \mu_{ck}(3\bar{y}_k + \alpha h) \bar{\epsilon}_{ck}^0 + \mu_{c(k+1)}(3\bar{y}_k + 2\alpha h) \bar{\epsilon}_{c(k+1)}^0 \} + 3\alpha \bar{y}_s \bar{\epsilon}_s^0 \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha_1 = 2\mu_s \bar{A}_s / \alpha h$ 、 $\bar{A}_s = A_s / A_0$

式(19)を解けば外力 $\bar{N}$ 、 $\bar{M}$ に対する $\bar{\epsilon}_v$ 、 $\bar{\epsilon}_\ell$ が求められるゆえ、所要の曲率 ϕ は後述の式(20)を用いることにより直ちに決定可能となる。すなわち、曲率 ϕ は図-4のひずみ分布より $(\bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_v)/h$ で与えられるゆえ、これを $\bar{\epsilon}$ で無次元すれば文献(1)より φ の算定式として次式をうる。

$$\varphi = \phi/\phi_{rc} = 1.5 \sigma_0 (\bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_v) / (E_c \phi_{rc}) = 1.5 (\bar{\epsilon}_\ell - \bar{\epsilon}_v) / \beta_1 \quad \text{--- (20)}$$

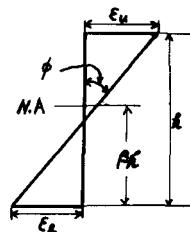


図-4

(4). たわみの算定

一般に曲げ応力によって生ずる単位長さ当りの断面に貯えられる補正エネルギーは文献(3)より次式で与えられる。

$$\partial U / \partial S = \int_A \int_B \varepsilon d\sigma dA = \int \phi dM \quad \text{-----(21)}$$

よって桁全体の補正エネルギー U はつぎのごとくなる。

$$U = \iint \phi dM dS \quad \text{-----(22)}$$

上式に変分原理を適用すれば、変位 δ_i の算定式として次式が導かれる。

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \left(\phi F'(\phi) \cdot \frac{1}{F'(\phi)} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_i} \right) dS = \int \phi \frac{\partial M}{\partial P_i} dS \quad \text{-----(23)}$$

ただし、 $M = F(\phi)$ 、 $F'(\phi) = dM/d\phi$

ここで図-5に示すとき片持ばりを桁の任意点 x のたわみ δ_i を求めれば下記の通りである。すなわち任意点 x の曲げモーメントは、 $M = -P(\ell - x)$ となるゆえ式(23)より

$$\delta_i = \int \phi \cdot (\partial M / \partial P_i) \cdot dS = \int \phi \{ -(\ell - x) \} dx$$

上式を $\varphi = \phi/\phi_c$ 、 $\bar{x} = x/\ell$ で無次元化すれば、結局次式をうる。

$$\bar{\delta}_i = -w_c \int \varphi (1 - \bar{x}) d\bar{x} \quad \text{-----(24)}$$

ただし、 $w_c = \phi_c \cdot \ell = \varepsilon_c \beta \ell / n / 1.5$ 、 $\bar{\delta}_i = \delta_i / \ell$

以上の諸式を用いれば、軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受けるR・C片持ばりの破壊に至る全過程の応力ならびに変形をうることができ、そのFlow chartを示せば、図-6のようになる。

3. 結語

本論文は矩形断面R・C片持ばりの曲げおよびせん断亀裂の影響を考慮した弾塑性解法を提示したもので、本法を拡張応用すれば単純ばりおよび連続ばりなどの弾塑性解析も可能となる。なお、本研究では平面保持の法則を仮定したが、亀裂が発生すればこの仮定は成立せず、また桁自身も図-7(a)に示すごとくし状の機構となる。すなわち、曲

げ亀裂によって新たに派生したくしの歯に相当する片持ばりは、鉄筋張力 T の作用を受けて固定端部に曲げ亀裂を生じ、最終的には片持ばりとしての機能を喪失する。その結果、桁は図-7(b)のような特殊なタイドアーチ構造となり、軸線に沿って大きな軸圧縮応力が働く。かくして最終崩壊はこれと直角方向の引張応力によって生ずる斜引張亀裂か、あるいは圧縮によるコンクリートの圧壊によって与えられると考えられる。勿論、本法はかかる内部破壊機構の変容を伴う算定法に適用できるものであり、この点に関する詳細は追って報告する予定である。

(参考文献)

- (1). 山崎徳也・太田俊昭；橋梁構造工学研究発表会論文集，昭和44年12月
- (2). Sindney A. Guralnick; Jour of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., January, 1959
- (3). 山崎徳也・太田俊昭・石川信隆；土木学会論文集，第134号，昭和41年12月



図-5

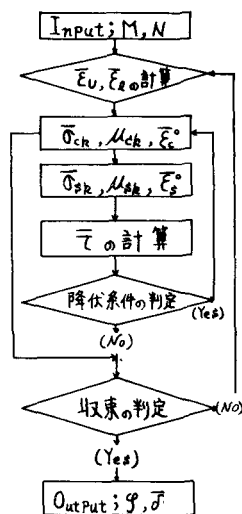


図-6

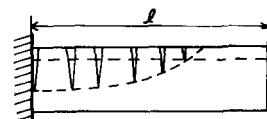


図-7(a)

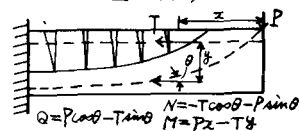


図-7(b)