

九州大学 正員 山崎 徳也

九州大学 正員 山田 喜四夫

九州大学 正員 樽木 武

1. 緒言

板が4隅のみで点支持または固定される矩形板に関しては、等分布荷重が満載される場合について級数解を用いる解法を提案した H. Marcus¹⁾, B.G. Galerkin²⁾, A. Nadai³⁾ および C.J. Thorne⁴⁾ の研究がある。また、S.L. Lee⁵⁾ らは板の弾性曲面として6個の未定定数を含む5次および6次の多項式を仮定するとき近似解法を提案した。集中荷重が板中央点に作用する場合については H. Marcus⁶⁾ の研究がある。任意状態に対しては差分法や Finite Element Method⁷⁾ による近似解法が可能である。

板が4隅の他に、その周辺に沿って少くとも1つ以上の柱または点支承にて支持されること矩形板に、任意曲直荷重が作用する場合については、上述の諸解法のうち、差分法および F.E.M を除けばいずれも適用が不可能である。また、差分法および F.E.M を直接用いる場合には周辺の支持点の増大にともなう、より多くの分割を考慮解析せねばならず、そのため高速電子計算機による多大の演算時間を要することになり、必ずしも実用的とはいえない。

これに対して1辺またはそれ以上の辺が柱または点支承にて支持される矩形板に対して著者らが提案した方法⁸⁾、すなわち、未知不静定力を適当に取り除いたより簡単な構造形式の矩形板(基本構)に関する断面諸量をあらかじめ算出のうえ、これを用いて基本連立方程式を解き本題の矩形板の解を求めること方法では基本構の解のみを用いて解析できる。基本構の1対辺が単純支持される場合には級数解を用いてその断面諸量の厳密値を算出することができる。また、任意の境界条件に対しては差分法や F.E.M により近似的に解析できるが、これらを用いる場合も単に基本構の解のみを求めればよいから、与系の柱または点支承の増大にともなう必ずしも分割を増大する必要はなく、本法は極めて実用的であるといえる。

本研究は上述の著者らの方法を拡張応用して4隅の他に柱または点支承で支えられ、かつ任意曲直荷重の作用を受けること矩形板の解法を提示するとともに、その力学的特性について考察せんとするものである。

2. 解法原理

板と柱とが直交して剛結する場合には、板から柱に垂直反力、 X , Y 方向の水平反力、曲げモーメントおよび捩りモーメントが伝えられるが、板面内の捩りモーメントおよび水平反力はそれぞれ微小であるからこれらを無視することにする(図-1参照)。かかるとき、4隅の点支承の他にその中間で n 個の柱で支えられること矩形板の柱反力を求めるための基本連立方程式は、文献(7)と同様の考察により、次のごとくえられる。

$$\begin{bmatrix} A_{1R}^d & A_{1R}^d & \cdots & A_{1R}^d & B_{1R}^d & B_{2R}^d & \cdots & B_{1R}^d & \cdots & B_{1R}^d & C_{1R}^d & C_{2R}^d & \cdots & C_{1R}^d & \cdots & C_{1R}^d \\ A_{1R}^x & A_{2R}^x & \cdots & A_{1R}^x & B_{1R}^x & B_{2R}^x & \cdots & B_{1R}^x & \cdots & B_{1R}^x & C_{1R}^x & C_{2R}^x & \cdots & C_{1R}^x & \cdots & C_{1R}^x \\ A_{1R}^y & A_{2R}^y & \cdots & A_{1R}^y & B_{1R}^y & B_{2R}^y & \cdots & B_{1R}^y & \cdots & B_{1R}^y & C_{1R}^y & C_{2R}^y & \cdots & C_{1R}^y & \cdots & C_{1R}^y \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} L_R^d - d_R \\ L_R^x - \theta_{xR} \\ L_R^y - \theta_{yR} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 $X = \{ R_1 R_2 \cdots R_i \cdots R_r \ M_{x1} \ M_{x2} \cdots M_{x1} \ M_{x2} \ M_{y1} \ M_{y2} \cdots M_{y1} \ M_{y2} \}^T$ $R=1, 2, \dots, Y$

R_i : 柱の垂直反力で上向きを正とする。 M_{xi}, M_{yi} : 柱 i の頭部における x および y 方向の反力モーメントで、梁点側からみてそれぞれ右まわりおよび左まわりを正とする。 dg : 柱 i の垂直変位で下向きを正とする。 θ_{ix}, θ_{iy} : M_{ix}, M_{iy} にそれぞれ対応する柱 i の頭部の回転変位である。ここで、本題の板構造から辺上の柱をすべて取り除いてえられる4隅点支持の矩形板を基本構と名付ければ、式(1)の係数行列における各要素および右辺第1項はそれぞれ基本構の断面諸量で与えられる形状定数および荷重項であり、文献(7)に示すごとく物理的意味をもつ。形状定数および荷重項を種々の基本構についてあらかじめ求めておけば式(1)を連立に解くことにより、柱の不静定反力が算定される。しかるとき、図-1に示す板構造は垂直荷重とともに柱の垂直反力および反力モーメントをも荷重として受ける基本構、すなわち4隅点支持矩形板の問題に帰することになり、重ね合わせの原理からその断面諸量が簡単にえられる。

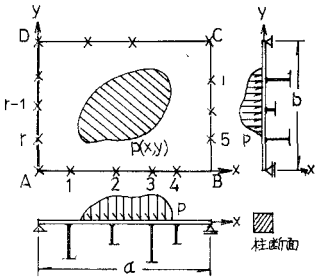


図-1

3. 計算結果

4隅点支持矩形板を基本構として述べ、有限要素法における *stiffness matrix* の逆行列を求め、これを用いて種々の荷重状態の解を求めれば次のとおりである。まず、板全面に荷重強度 p_0 の等分布荷重が満載される場合には、基本構のたわみおよび曲げモーメント M_x が表-1のようになれる。ただし、正方形板にポアソン比 ν を0.3とした。 6×6 分割の F.E.M で求めた値は、級数解よりえられた H. Marcus の値と比較して、たわみでは殆んど一致し、曲げモーメント M_x は板中心点で約4.2%、皿中央点で約7.9%大きい値となるが、分割をさらに細かく取れば誤差は減少するものと思われる。図-2は F.E.M を用いて基本構のたわみおよび曲げモーメントを種々の荷重状態について求めたものである。

	たわみ	$\nu p_0 a^4 / D$	曲げモーメント M_x	$\nu p_0 a^2$
(x, y)	(1/2, 1/2)	(1/2, 0 0)	(1/2, 1/2)	(1/2, 0 0)
F.E.M (6×6)	0.02493	0.01729	0.1135	0.1515
H. Marcus	0.02487	0.01705	0.1090	0.1494
S.L. Lee	0.02607	0.01861	0.1104	0.1542
B.G. Galerkin	0.02638	0.01805	0.1109	0.1527

表-1

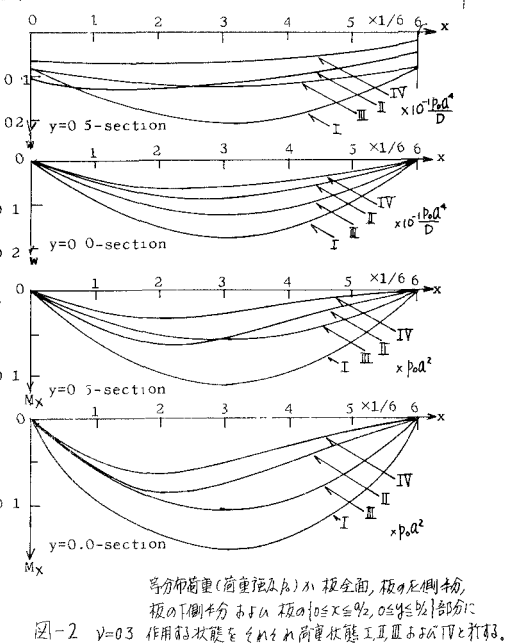


図-2 $\nu=0.3$ 等分布荷重(荷重強度 p_0)が板全面、板の側面、板の隅角部分 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 部分に作用する状態をそれぞれ荷重状態 I, II, III, IV とする。

次に、4隅の点支持に加えて周辺においても点支持される矩形板の解を求めよう(図-3参照)。かかる場合には、反力モーメントがないやえ式(1)は次のごとく簡単なる内容となる。

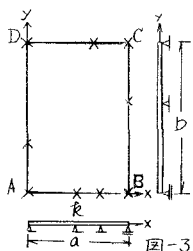


図-3

$$\{A_{1k}^d \ A_{2k}^d \ \dots \ A_{rk}^d \ \dots \ A_{rk}^d\} \{R_1 \ R_2 \ \dots \ R_r\} \cdot R_i^T = \{L_k^d - d_k\} \quad k=1,2 \quad r(2)$$

いま、1個の中間支点 R_i が辺 AB 上に設けられているとき、中間支点 R_i の位置に応じる形状定数および荷重項が表-2のごとくえられ、したがってこれら諸

値を式(2)に代入し、さらに反点決定がないものとして解けば、中間反点反力の垂直反力 R_k が表-3のように求められる。図-4は表-3をグラフにしたものであるが、中間反点反力が隅に近づくにしたがってその垂直反力 R_k は増大する。たとえば、全面分布荷重が作用するとき、辺 AB の $1/6$ 点に中間反点がある場合の垂直反力 $R_k(1/6)$ は中央点にある場合の垂直反力 $R_k(1/2)$ に比べて約38%大きいことが認められる。図-5、6は辺 AB と板中央点のたわみおよび曲げモーメント M_x をそれぞれ示したものである。

位置 x $1/6$	形状定数 A_{ik}	荷重状態 L_k			
		荷重状態 I	荷重状態 II	荷重状態 III	荷重状態 IV
1	0.022060	0.008920	0.004859	0.006259	0.003533
2	0.048691	0.015065	0.007977	0.010671	0.005735
3	0.059200	0.017293	0.008647	0.012240	0.006120
4	0.048692	0.015065	0.007089	0.010671	0.004937
5	0.022060	0.008920	0.003961	0.006259	0.002727

表-2

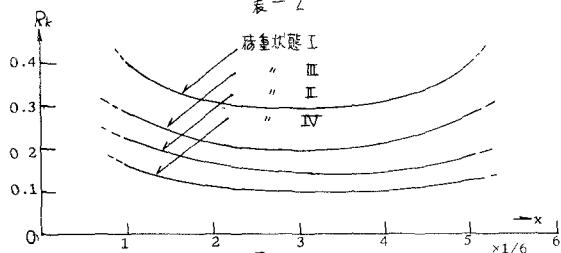


図-4

表-3

位置 x $1/6$	形状定数 A_{ik}	中間反点反力 R_k			
		荷重状態 I	荷重状態 II	荷重状態 III	荷重状態 IV
1	0.39980	0.22027	0.28373	0.16013	
2	0.30945	0.16385	0.21919	0.11779	
3	0.29211	0.14606	0.20675	0.10338	
4	0.30945	0.14560	0.21919	0.10140	
5	0.39980	0.17953	0.28373	0.12359	

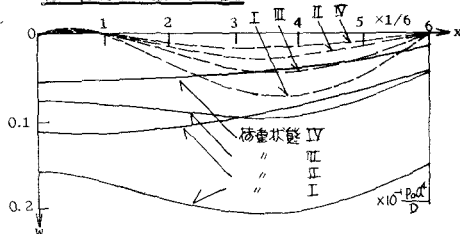
また、辺 AB において $x=1/3$ および $x=2/3$ の位置で同時に点支持される場合の演算結果を示せば表-4のとくえられ、全面分布荷重を受けるときのたわみおよび曲げモーメント M_x を求めれば図-7のとおりである。

次に、周辺が柱にて支持される場合、柱に生じる点静定反力を求めることは点支持のそれと全く同様にし

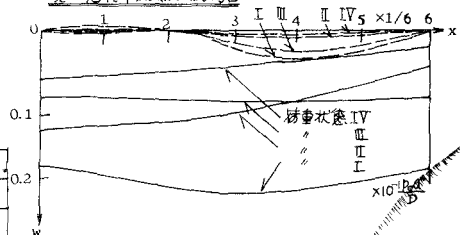
荷重状態	反点位置 $x=1/3$	反点位置 $x=2/3$
I	0.17536	0.17536
II	0.12646	0.04890
III	0.12421	0.12421
IV	0.09604	0.02727

表-4 中間反点反力 R_k ($\times 10^3$)
 $\nu=0.3$

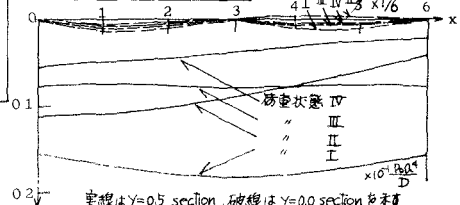
$x=1/6$ に中間反点がある場合



$x=1/3$ に中間反点がある場合



$x=0.5$ に中間反点がある場合



実線は $y=0.5$ section, 破線は $y=0.0$ section を示す

図-5 たわみ $\nu=0.3$

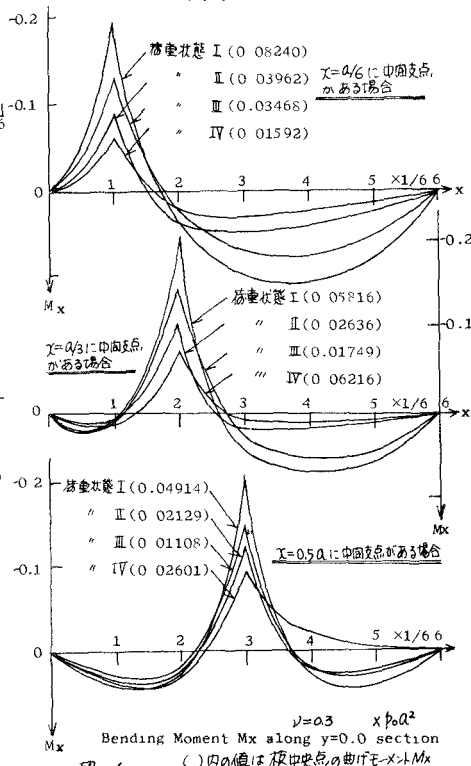


図-6

Figure 7 consists of two vertically aligned graphs sharing a common x-axis from 0 to 6, with major ticks every 1 unit and minor ticks every 0.5 units.

The top graph plots transverse displacement w (scaled by $10^{-1} p_0 a^4/D$) against x . The y-axis ranges from 0 to 0.2. Four curves are shown, labeled from top to bottom: $y=0.0$ section, $y=1/6$ section, $y=1/3$ section, and $y=0.5$ section. All curves show a slight downward deflection, with the $y=0.5$ section having the largest deflection.

The bottom graph plots bending moment M_x (scaled by $10^{-1} p_0 a^2$) against x . The y-axis ranges from 0 to 0.4, with values below the axis representing negative moments. A curve is shown for the $y=0.0$ section, which has two sharp positive peaks reaching approximately 0.45 at $x \approx 2.1$ and $x \approx 4.1$, and two deep negative troughs reaching approximately -0.45 at $x \approx 1.1$ and $x \approx 5.1$. A label indicates the central support value is 0.06495. At the right boundary ($x=6$), the value is $y=0.3$.

Figure 7

(3)

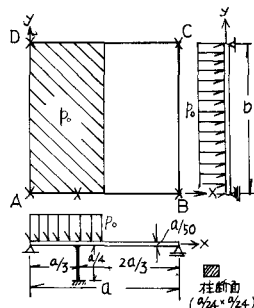
$$M_{yk} = -0.0249 \text{ poa}^3$$

本例題においては垂直反力は点支持の場合に比べて、増大するにすぎず殆んど一致する。また、たわみは図-9のようにえられ振中変位では点支持の場合の値に比べて約122%減少する。

4. 結語

本研究は4隅の他に周辺が柱または点支持で支えられると3矩形板の解法と、これよりえられた演算結果を提示したものであるが、本法によれば、単に4隅で点支持される矩形板に F, E, M を適用し、その *stiffness matrix* の逆行列を求める過程において電子計算機を必要とするに過ぎず、他の不静定力の算定や板の断面諸量の算出は全て手計算で行うことができ、極めて実用的であるといえる。

また、本法を拡張を用いれば、単に本研究で求めた4隅点支持矩形板の *stiffness matrix* の逆行列を用いることにより 表一



表一 5

形 状 定 数			荷 重 項
$A_0^d = 0.048686$	$B_0^d = 0.060812$	$C_0^d = -0.010510$	$L_1^d = 0.010671$
$A_1^d = 0.060812$	$B_1^d = 0.746987$	$C_1^d = -0.082621$	$L_2^d = 0.018546$
$A_2^d = 0.105105$	$B_2^d = 0.082622$	$C_2^d = -1.10145$	$L_3^d = -0.006341$

4 隅が固定または柱にて支持され、かつ中間柱をもつごとく矩形板や全周皿が柱にて支持される多角形板の解析も可能であり、これらについては後日報告の予定がある。

References :

- 1) H. Marcus : Die Theorie elastischer Gewölbe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Springer verlag, Berlin, 1932
- 2) B. G. Galerkin : Collected Works Vol. 2, I. A. N. SSSR
- 3) A. Nadai : Z. angew. Math. Mech. 2, 1 (1932)
- 4) C. J. Thorne : J Appl Mechanics, v15 1948. p14
- 5) S. L. Lee and Ballesteros : Uniformly Loaded Rectangular Plate Supported at the Corners, Int. J. Mech. Sci 2, 1960
- 6) William T. J. Shieh & S. L. Lee : Analysis of Plate Bending by triangular Element, Proc ASCE, October, 1968
- 7) 山崎, 山田, 櫻木 : 周辺4柱に7支持される矩形板の力学的特性, 第24回土木学会年次学術講演会講演短冊 (S 44, 10)
- 8) K. Gökman : Flächentragwerk, Wien - Springer-Verlag, sechste Auflage, 1963
- 
- 図-9 板のたわみ (前表状態Ⅱ) $v=0.3$

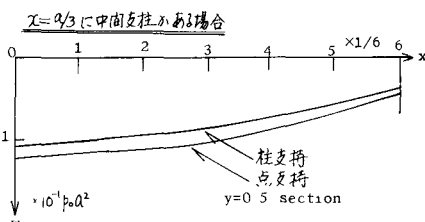


図-9 たわみ (荷重状態Ⅱ) $v=0.3$