

長崎大学 正員 山崎 毅

1. まえがき

橋梁形式として多岐にわたるアルバー梁は静定構造物であり、力のつり合い条件のみから、反力、断面力を算定することの出来る。いわゆる簡単な部類に属するはり構造物であると考えられてきた。求むるものから支えの反力やはり上の任意点の断面力を知りたがる場合には、このように見方も成り立つであろう。しかし、アルバー梁に於いて、その荷重に対する変形あるいはその自由振動性状、座屈性状などを解析する際には、すなわち、変形に因する量をも考慮する必要がある場合には、上記の見方は必ずしも妥当なものであるとは思われない。

著者は橋梁形式その他の原因にあつて、たわみ角、曲げモーメント、せん断力、曲げ剛性、断面積などの諸要素のいずれかが不連続函数で表わされる構造物の解析にあつて、不連続要素に起因する式取扱いの繁雑を回避し得る一般的方法を得んとするものにあつた。ここでは、アルバー梁の座屈現象の解析に対してこの方法を提示する。

2. 基礎方程式

一様な断面を持つ、両端部にそれぞれ大きき \$P\$ なる軸圧縮力を受ける直線はりの座屈は、周知の次式によつて表わされる。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

アルバー梁の座屈も基本的には式(1)によつて表わされるが、解析の便利のために、式(1)を次のように変形する。はりの全長を \$L\$ とし、\$\eta = x/L\$ なる無次元変数を用いれば、式(1)は

$$\frac{d^4 y}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y}{d\eta^2} = 0 \quad (2)$$

$$k^2 = \frac{PL^2}{EI}$$

いま、図-1に示すアルバー梁の場合には、式(2)は \$\eta = \eta_1, \eta_2\$ なる点を除く全 \$L\$ の長、すなわち、ヒンジ点 \$H\$ および中間支え \$B\$ を除く全 \$L\$ の長に於いて成立する。

ヒンジ点 \$H\$ および中間支え \$B\$ は、これらの長に於いて、それと左右のたわみ角およびせん断力が不連続となるので、はり上の他の点とは異なる特殊な点であると思ふべきでない。

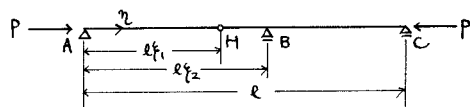
図-1のアルバー梁の座屈方程式

$$\frac{d^4 y}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y}{d\eta^2} = 0 \quad (\eta \neq \eta_1, \eta_2) \quad (3)$$

の解は次の形に表わされることとする。

$$y(\eta) = y_1(\eta) + y_2(\eta) \cdot u(\eta - \eta_1) + y_3(\eta) \cdot u(\eta - \eta_2) \quad (4)$$

ただし、函数 \$y(\eta)\$ は \$0 \leq \eta < \eta_1, \eta_1 < \eta < \eta_2, \eta_2 < \eta \leq 1\$ なる変域に於いて意味をもつものであるが、



(図-1)

函数 $y_1(\eta)$, $y_2(\eta)$, $y_3(\eta)$ は η の全 2 の変域に於いて定義されるものにある。従って、 $u(\eta-\xi_1)$, $u(\eta-\xi_2)$ は単位階段函数にある。

式(4)と式(3)を代入して

$$\left(\frac{d^4 y_1}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y_1}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{d^4 y_2}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y_2}{d\eta^2}\right) \cdot u(\eta-\xi_1) + \left(\frac{d^4 y_3}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y_3}{d\eta^2}\right) \cdot u(\eta-\xi_2) = 0 \quad (5)$$

に於いて、次の3式

$$\frac{d^4 y_1}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y_1}{d\eta^2} = 0 \quad (6.a), \quad \frac{d^4 y_2}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y_2}{d\eta^2} = 0 \quad (6.b), \quad \frac{d^4 y_3}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2 y_3}{d\eta^2} = 0 \quad (6.c)$$

が成立すると、明らかに式(5)は成立する。

3個の方程式(6.a), (6.b), (6.c)の解式に含まれる未知関数4個のうち12個の積分定数は次の12個の条件により決定される。すなわち

$$\eta=0; \quad y_1(0)=0 \quad (7.a), \quad y_1''(0)=0 \quad (7.b)$$

$$\eta=1; \quad y_1(1)+y_2(1)+y_3(1)=0 \quad (7.c), \quad y_1'(1)+y_2'(1)+y_3'(1)=0 \quad (7.d)$$

$$\eta=\xi_1; \quad y_2(\xi_1)=0 \quad \text{右側の連続条件} \quad (7.e)$$

$$y_1''(\xi_1)=0 \quad \left. \begin{array}{l} y_1''(\xi_1)=0 \\ y_2''(\xi_1)=0 \end{array} \right\} \text{曲率連続条件} \quad (7.f)$$

$$y_2''(\xi_1)=0 \quad \left. \begin{array}{l} y_1''(\xi_1)=0 \\ y_2''(\xi_1)=0 \end{array} \right\} \text{曲率連続条件} \quad (7.g)$$

$$y_2'''(\xi_1)=0 \quad \text{せん断力の連続条件} \quad (7.h)$$

$$\eta=\xi_2; \quad y_1(\xi_2)+y_2(\xi_2)=0 \quad \left. \begin{array}{l} y_1(\xi_2)+y_2(\xi_2)=0 \\ y_3(\xi_2)=0 \end{array} \right\} \text{右側の連続条件} \quad (7.i)$$

$$y_3(\xi_2)=0 \quad \text{右側の連続条件} \quad (7.j)$$

$$y_3'(\xi_2)=0 \quad \text{右側の角の連続条件} \quad (7.k)$$

$$y_3''(\xi_2)=0 \quad \text{曲率連続条件} \quad (7.l)$$

条件(7.a), (7.b)の下で方程式(6.a)の解を求めれば

$$y_1(\eta) = y_1'(0) \cdot \eta + \frac{y_1'''(0)}{k^2} \left(\eta - \frac{1}{k} \sin k\eta \right) \quad (8.a)$$

方程式(6.b)の解は条件(7.e), (7.g), (7.h)を考慮して

$$y_2(\eta) = y_2'(\xi_1) \cdot (\eta - \xi_1) \quad (8.b)$$

また、(7.d), (7.h), (7.l)なる条件があるとして、方程式(6.c)の解は次のとおりとなる。

$$y_3(\eta) = \frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2} \left[(\eta - \xi_2) - \frac{1}{k} \sin k(\eta - \xi_2) \right] \quad (8.c)$$

したがって、ツルバ一梁の座屈形状は、式(8.a), (8.b), (8.c)と式(14)を代入することにより、次のように得られる。

$$y(\eta) = y_1'(0) \cdot \eta + \frac{y_1'''(0)}{k^2} \left(\eta - \frac{1}{k} \sin k\eta \right) + y_2'(\xi_1) \cdot (\eta - \xi_1) u(\eta - \xi_1) + \frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2} \left[(\eta - \xi_2) - \frac{1}{k} \sin k(\eta - \xi_2) \right] u(\eta - \xi_2) \quad (9)$$

$$\text{ただし} \quad y''(\eta) = \frac{y_1'''(0)}{k^2} (k \cdot \sin k\eta) + \frac{y_2'''(\xi_1)}{k^2} [k \cdot \sin k(\eta - \xi_1)] u(\eta - \xi_1) \quad (10)$$

次に、残りの条件(7.c), (7.d), (7.f)および(7.i)から次の4条件式を得る。

$$y_1'(0) + \frac{y_1'''(0)}{k^2} \left(1 - \frac{1}{k} \sin k \right) + y_2'(\xi_1) (1 - \xi_1) + \frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2} \left[(1 - \xi_2) - \frac{1}{k} \sin k(1 - \xi_2) \right] = 0$$

$$\frac{y_1'''(0)}{k^2} (k \cdot \sin k) + \frac{y_2'''(\xi_1)}{k^2} [k \cdot \sin k(1 - \xi_1)] = 0$$

$$\frac{\partial_1''(0)}{k^2} \cdot (k \sin k \eta_1) = 0$$

$$y_1'(0) \cdot \eta_2 + \frac{\partial_1''(0)}{k^2} (\eta_2 - \frac{1}{k} \sin k \eta_2) + y_2'(\eta_1) \cdot (\eta_2 - \eta_1) = 0$$

この4条件式より、ツルバー梁の座屈条件式として次の2式を得る。

$$\sin k \eta_1 = 0 \quad (11)$$

$$\sin k(1 - \eta_2) = 0 \quad (12)$$

式(11)および式(12)の条件によって表わされる座屈定数 k をそれぞれ第I形式座屈定数および第II形式座屈定数と呼ぶことにする。

3. 変位および数値計算

(1). 第I形式座屈

座屈条件式(11)によって表わされる座屈は、ツルバー梁のツリスパンAHに部分的な座屈が生じ、これに付随して、アエカースパンBC、張出しスパンHBにも変形が生ずるという形式のものである。この時の座屈定数の最小値 $P_{I,cr}$ は

$$P_{I,cr} = \left(\frac{\pi}{\eta_1} \right)^2 \frac{EI}{L^2}$$

また、座屈波形 $y(\eta)$ は

$$y(\eta) = \frac{\partial_1''(0)}{k^2} \left\{ (1 + \alpha) \cdot \eta - \frac{1}{k} \sin k \eta + \beta (\eta - \eta_1) u(\eta - \eta_1) + \gamma [(\eta - \eta_2) - \frac{1}{k} \sin k(\eta - \eta_2)] u(\eta - \eta_2) \right\}$$

$$\alpha = \frac{(1 - \eta_1) \cdot \frac{\sin k \eta_2}{k}}{\eta_1 (1 - \eta_2)} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1} \frac{\sin k}{\sin k(1 - \eta_2)} - 1$$

$$\beta = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\sin k}{\sin k(1 - \eta_2)} - \frac{1}{\eta_1 (1 - \eta_2)} \frac{\sin k \eta_2}{k}$$

$$\gamma = - \frac{\sin k}{\sin k(1 - \eta_2)}$$

(2). 第II形式座屈

座屈条件式(12)によって表わされる座屈は、ツルバー梁のアエカースパンBCに部分的な座屈が生じ、これに付随して、張出しスパンHBおよびツリスパンAHにも変形が生ずる形式のものである。

このときの座屈定数の最小値 $P_{II,cr}$ は

$$P_{II,cr} = \left(\frac{\pi}{1 - \eta_2} \right)^2 \frac{EI}{L^2}$$

また座屈波形 $y(\eta)$ は

$$y(\eta) = \frac{\partial_2''(0)}{k^2} \left\{ \delta \cdot \eta + \varepsilon \cdot (\eta - \eta_1) \cdot u(\eta - \eta_1) + [(\eta - \eta_2) - \frac{1}{k} \sin k(\eta - \eta_2)] \right\}$$

$$\delta = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1}$$

$$\varepsilon = - \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

(3). 第I形式および第II形式の座屈の発生範囲

与えられたツルバー梁が第I形式に座屈するか第II形式に座屈するかは、 $P_{I,cr}$ と $P_{II,cr}$ との大小関係によって、それぞれ、ヒンジ両端の中間支えの位置関係によって決まる。この相関関係を図-2

に示す。また、図-3はヒンジ位置および中肉交差位置と座圧分布との関係を示すものである。図-4はⅠ形式およびⅡ形式の座圧の波形を示す。

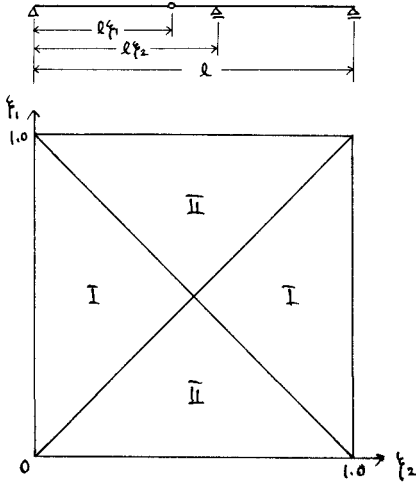


図-2

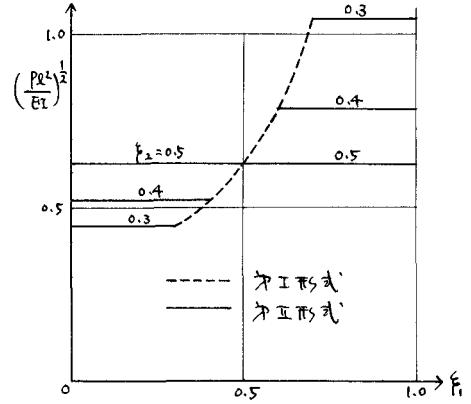


図-3

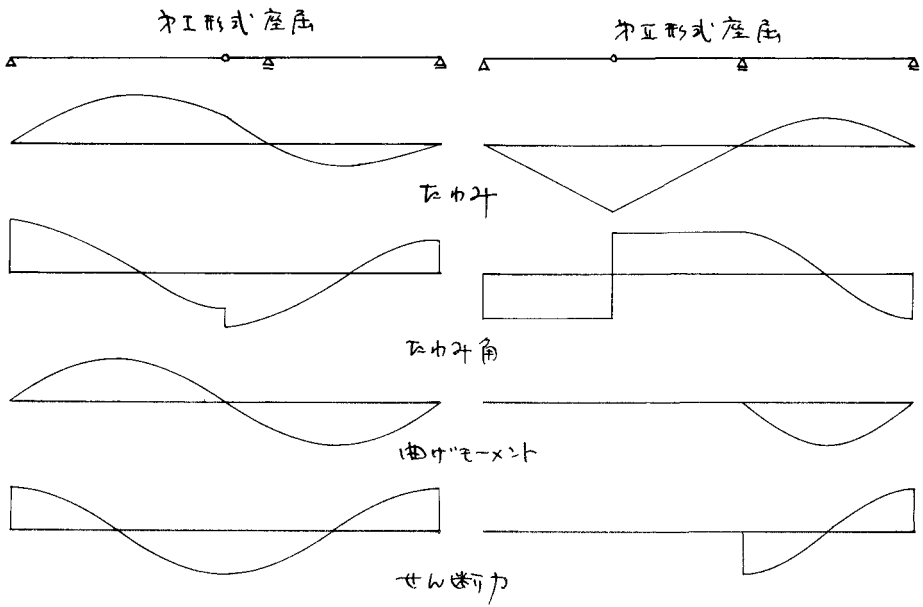


図-4