

九州大は 正会員 橋本武

1 緒言 著者は、これまで主として全周固定壁等支持される無梁板構造(以下単に無梁板と称する)において、著者に見受けられるごとく、スラブに比して壁の曲げ剛性が十分小さい場合、すなわち全周固定単純支持される無梁板の解法について研究し、その成果を報告してきた¹⁾。しかしながら、実際には単純支持のみならず、固定と自由とあるいは自由と固定とある場合がしばしばあり、これらに對して十分安全な設計を行うためには、当然ながら、かかる周辺の条件を確実に考慮したより厳密な解法を確立する必要がある。そこで、著者はこれ迄の理論を拡張適用して、周辺に任意の境界条件が支持されること無梁板の解法について研究を行うものであるが、本研究はその手始めとして、

四辺が単純支持される他三辺に任意の境界条件を有すること無梁板の解法について報告するものである。

2 解法 (1)基本連立方程式による解法 一対辺が単純支持される無梁板に垂直荷重が作用する場合、板から柱に伝えられる反力として垂直反力および直向二方向の面外反力モーメントのみを考慮し、板面内の水平反力および反力モーメントを微小と考へ無視するものとする。かかるとき、垂直荷重の他にこれら諸反力をも荷重とみなして、周辺の境界条件を満足する一対辺単純支持矩形板の弾性曲面を求めれば、板の基礎微分方程式から次のごとく算定される(図1)。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ f_{mn}(\xi) + \sin m\pi\zeta \} G_{mn} \sin m\pi\eta \quad (1)$$

ここに、 $G_{mn} = \frac{D^4}{(m\pi)^2 + (n\pi/b)^2}$ 、 D : 板剛度、 $\mu = b/a$ 、 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ 、

a, b : x, y 方向の板の辺長、 $2l_{ax} \times 2l_{by}$: 柱列の断面積(矩形)。

$$T_{mn} = p_{mn} - \frac{4}{a^2} \sum_{i=1}^r \{ V_{ix} \Gamma_{ix}(m, n) \sin m\pi \xi_{ix} \sin n\pi \eta_i - \frac{1}{a} M_{ix}^2 \Gamma_{ix}^2(m, n) \cos m\pi \xi_{ix} \sin n\pi \eta_i - \frac{1}{b} M_{iy}^2 \Gamma_{iy}^2(m, n) \sin m\pi \xi_{ix} \cos n\pi \eta_i \},$$

$$f_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 p(\xi, \eta) \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta d\xi d\eta, \quad p(\xi, \eta) : \text{荷重強度} \quad \Gamma_{ix}(m, n) = \frac{1}{\pi^2 l_{ax} l_{by} m n} \sin m\pi l_{ix} \sin n\pi l_{iy}$$

$$\Gamma_{iy}^2(m, n) = \frac{3}{\pi^2 l_{ax} l_{by} m n} \left(\frac{\sin m\pi l_{ix}}{m\pi l_{ix}} - \cos m\pi l_{ix} \right) \sin n\pi l_{iy}, \quad \Gamma_{ix}^2(m, n) = \frac{3}{\pi^2 l_{ax} l_{by} m n} \left(\frac{\sin n\pi l_{iy}}{n\pi l_{iy}} - \cos n\pi l_{iy} \right) \sin m\pi l_{ix}$$

式(1)右辺(内等号)は周辺単純支持矩形板の解であり、また第1項の $f_{mn}(\xi)$ は図A CおよびB Dの境界条件に充てる補正項であり、種々の境界条件のうちその一部について表-1のごとく決定される。

境界条件	$f_{mn}(\xi)$
1 AC : 固定 BD : 固定	$\frac{m\pi}{1 - (\frac{m\pi}{\mu})^2 / \delta_n^2} \left[\{ (-1)^m + \frac{m\pi}{\mu} / \delta_n \} \frac{1}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi - \{ (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n + (-1)^m (1 - \frac{m\pi}{\mu} \frac{\delta_n}{\delta_n}) \} \frac{\xi}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi - (-1)^m (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi + \xi (\frac{\delta_n}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi - \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi) \right]$
2 AC : 自由 BD : 自由	$\frac{m\pi \{ (\frac{m\pi}{\mu})^2 + (2-\nu) (\frac{m\pi}{\mu})^2 \}}{\{ (2+\nu)^2 - (1-\nu)^2 (\frac{m\pi}{\mu})^2 / \delta_n^2 \}} \left[\{ (1-\nu) (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n - (2-\nu) (1+\nu) \} \frac{1}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi - \{ (1-\nu) (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n - (2-\nu) (1+\nu) (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n \} \frac{\xi}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi + 2 \left\{ \frac{1}{\delta_n} - \frac{(1-\nu) (\frac{m\pi}{\mu})}{(3+\nu) (1-\nu) (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n} \right\} \frac{1}{\delta_n} \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi + 2 \frac{(1-\nu) (\frac{m\pi}{\mu})}{(3+\nu) (\frac{m\pi}{\mu}) / \delta_n} \left(\frac{\xi}{\delta_n} \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi - \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi \right) - (3+\nu) \xi \left(\frac{\delta_n}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi - \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi \right) \right]$
3 AC : 固定 BD : 単純支持	$\frac{m\pi}{1 - (\frac{m\pi}{\mu})^2 / \delta_n^2} \left\{ \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi / (\delta_n \delta_n) + \xi (\delta_n \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi / \delta_n - \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi) \right\}$
4 AC : 単純支持 BD : 自由	$\frac{m\pi \{ (m\pi)^2 + (2-\nu) (\frac{m\pi}{\mu})^2 \} (-1)^m}{(3+\nu) + (1-\nu) (\frac{m\pi}{\mu})^2 / \delta_n^2} \left[- \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{m\pi}{\mu} \right)^3 \left\{ 2 + (1-\nu) \frac{m\pi}{\mu} \frac{\delta_n}{\delta_n} \right\} \frac{1}{\delta_n} \sinh \frac{n\pi}{\mu} \xi + \left(\frac{m\pi}{\mu} \right) \frac{\xi}{\delta_n} \cosh \frac{n\pi}{\mu} \xi \right]$

表-1 $f_{mn}(\xi)$ の式

$$\delta_n = \sinh \frac{n\pi}{\mu}, \quad \delta_n = \cosh \frac{n\pi}{\mu}$$

他方、柱 i, j の頭部における板と柱との変形条件は次のごとくである。

$$w(\xi, \eta) = d_{ij}, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) = a \theta_{ij}^x, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta) = b \theta_{ij}^y \quad (i=1, 2, \dots, r, \quad j=1, 2, \dots, s) \quad (2)$$

こゝに、 d_{ij} , θ_{ij}^x , θ_{ij}^y は柱 i, j の頭部の垂直変位および x , y 方向の回転変位

式 (2) を式 (1) に代入のうゑ、適宜整理すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} H_{kl}^y - \frac{1}{a} M_{kl}^x H_{kl}^{xy} - \frac{1}{b} M_{kl}^y H_{kl}^{xy}) &= \frac{ab}{4} L_y - \frac{\mu D}{4a} d_{ij} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} O_{kl}^y - \frac{1}{a} M_{kl}^x O_{kl}^{xy} - \frac{1}{b} M_{kl}^y O_{kl}^{xy}) &= \frac{ab}{4} L_y^x - \frac{\mu D}{4a} \theta_{ij}^x \\ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s (V_{kl} Q_{kl}^y - \frac{1}{a} M_{kl}^x Q_{kl}^{xy} - \frac{1}{b} M_{kl}^y Q_{kl}^{xy}) &= \frac{ab}{4} L_y^y - \frac{\mu D}{4a} \theta_{ij}^y \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad i=1, 2, \dots, r, \quad j=1, 2, \dots, s$$

$$\therefore H_{kl}^y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \}$$

$$H_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \cos m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \}$$

$$H_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \sin m\pi \xi_k \cos n\pi \eta_l \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \}$$

$$O_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_l$$

$$O_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \cos m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_l$$

$$O_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \sin m\pi \xi_k \cos n\pi \eta_l \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_l$$

$$Q_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_l$$

$$Q_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \cos m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_l$$

$$Q_{kl}^{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \Gamma_{kl}(M, N) \sin m\pi \xi_k \cos n\pi \eta_l \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_l$$

$$L_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l}{K_{mn}}, \quad L_y^x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l}{K_{mn}} n\pi \cos n\pi \eta_l$$

$$L_y^y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l}{K_{mn}}, \quad K_{mn} = \{ (m\pi)^2 + (n\pi/\mu)^2 \}^2$$

式 (3) は柱の未知反力と回転の連立方程式であり、これを無梁板に與する基本連立方程式と名付けらる。

垂直変位 d_{ij} が柱の予等沈下量だと既知量として与えられるものとし、また、既径のはり理論における

たわみ角式から、柱頭の回転変位 θ_{ij}^x , θ_{ij}^y を反力モーメント M_{ij}^x , M_{ij}^y の関数として求め、これらの諸

値および関係式を式 (3) に代入のうゑ連立に解けば、柱の未知反力が算出されることになる。また、

この結果を式 (1) に代入すれば板の弾性曲面が求められる、さらに、 w と板の断面諸量に與する既径

の関係から、板の任意点におけるたわみ角および曲げモーメント、捩りモーメント M とが算定され、

本題の等梁板が解けたことになる。なお、式 (3) 左辺における諸係数 H, O, Q は板の四長比や柱の位置

などの諸寸法によつて決まる形状定数であり、また右辺の L は荷重状態により定まる荷重値であるが、

これらはいずれも題意の等梁板から柱を取り除いて与えられる矩形板 (基本構) のたわみ角およびたわみ

と関係付けることができる。たとへば、 $f_{mn}(\xi)$ として表-1 の (1) を用いる場合、形状定数 H_{kl}^y は 1 次

辺が単純支持され他 3 辺が固定される矩形板に、単位荷重 $\bar{p}$ (柱の断面 $2a \times 2b$ の領域に等分布し、

かつその総和が単位であるとき荷重) が突如に作用するとき、突如に下向きに起す垂直変位 d_y を 1

倍したものであるといえる。また、荷重 L_y は、無梁板に作用する垂直荷重と同じ荷重が上述の矩

形板に働くとき、矩形板の突如に下向きに起す垂直変位 d_y を 1 倍したものである。

(2) たわみ角-端モーメント関係式による解法 1 次辺が単純支持され、他 3 辺が単純支持または固定

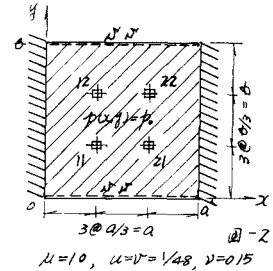
されるとき無梁板は、着者がここに示したたわみ角-端モーメント関係式による連続矩形板の解法

を拡張応用することによつて解析することができ、その結果について既に文献 (3) に報告したので、

省略する。本法は連続等梁板の解法にも適用できる突如 (1) の方法に勝るが、実用的見地から (1) の方

法が望まれない。すなわち、(1)の方法では形状定数および面定値をあらかじめ算出のうえ図表化してあげれば、任意の位置に柱が存在するか種々の面定を渡けうごとく多様な無梁板を、簡単に四則演算のみによって解析することから、ラーメンや連続梁の解析と何ら変わりない力となる。これに對し、本法では固定端の端モーメントを板状展開式により仮定すること、および回転角に関する周辺の境界条件が板状展開の展開係数を用いて表わされるため、未知静定量を算出するための連立方程式が未知数の単独項と板状展開の項とで示されたり、また展開形式の $m \times 2$ 与えられ、したがって、その解析は一種の試算による収束計算となり多大の労力を要することになる。

3 計算例 (1) 1辺が単純支持され、他3辺が固定される無梁板
図-2に示すごとく周辺条件をもち、また中間で4本の柱に支持される無梁板に、等分布面荷が満載される場合の解法を述べは次のごとくである。なお、簡単な下の、既往研究に引受けられるごとく本例では柱の反力モーメントを無視し、垂直反力のしかきするものと仮定する。周辺単純支持無梁板に関する諸数値(文献(1)参照)を補正することにより、本例の無梁板に関する基本連立方程式の形状定数および面定値を求めれば表-2のごとくである。これら諸値を用いて基本連立方程式を解けば柱の垂直反力が次のごとく算出される。

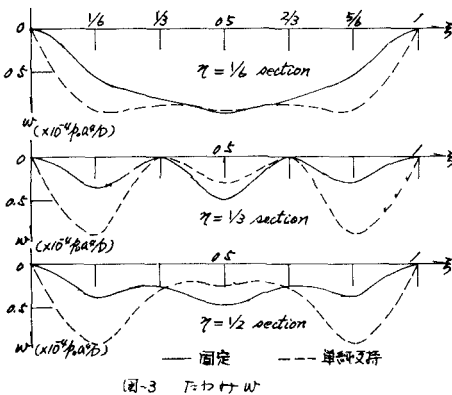


	(a) 周辺単純支持	(b) 補正值	(a)+(b)
形状定数	0.8529	-0.3570	0.4959
面定	0.5338	-0.3147	0.2191
反力	0.5329	-0.2780	0.2549
反力	0.4261	-0.2598	0.1663
面定	0.3114	-0.1750	0.1364

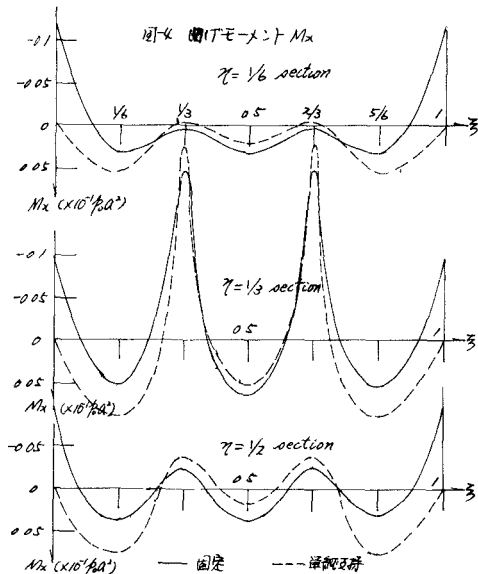
表-2

$$V_{ij} = 0.120 \text{ } \rho a^2 \quad (i=1,2, \quad j=1,2)$$

この値は全周辺が単純支持される場合の解 $V_{ij} = 0.133 \text{ } \rho a^2$ に對して約98%小さい。すなわち、柱の負担力が減少しその設計に關しては有利であるといえる。柱の垂直反力 V_{ij} 値を式(4)に代入すれば、本例の弹性曲面が求まり、さらにこれより板の断面諸量が決定されるが、これらのうち、たしかに、 x および y 方向の曲げモーメント M_x, M_y について算出のうえプロットすれば図-3、4,5のごとくえられる。なお図中には全周辺が単純支持される無梁板の解を併記して比較対照した。



(2) 1辺が固定され、他の3辺が単純支持される無梁板
図-6に示すごとく無梁板1枚に、等分布面荷が半載される場合の解を、(中間柱の反力モーメントを考慮する場合と、無視する場合について求め



れは図-7, 8, 9 のごとくである。

4 結論 本法は1初辺が単純支持または他初辺が任意境界条件で与えられるのに加えて、(F)図2任意に配列されることと寸法を一定無梁板を、板の基礎微分方程式にもとづく微分級を用いて解析したものであるが、さらに図2のごとき、さらに基本連立方程式の形が定数および荷重値が11すなわち基本橋の形状と関係づけられるので、他の手法(差分法やFEMなど)による基本橋の解析結果を用いることも可能である。すなわち、本法を拡張適用すれば全周が全く任意に与えられることと無梁板や、さらに任意形状の板を構成される無梁板の解析も可能であり、これらについて今後報告の予定である。

参考文献 (1) 山崎 橋本 図2の単純支持または他初辺の解法、

工知論叢書136(145)号、N41.12、

(2) 山崎 橋本 橋田 下付付同橋

メント(図2式)による重荷等が定数形

板の解法、工知論叢書145号、

N42.3、(3) 山崎 橋本 全周

1初辺が固定または単純支持

または無梁板の解法、第22回工不

学会年次学術講演会講演要録

第、N42.5

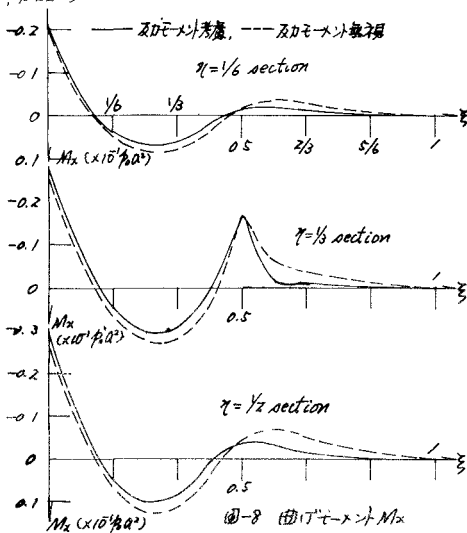
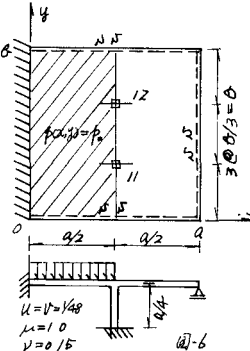


図-8 (曲げモーメント M_x)

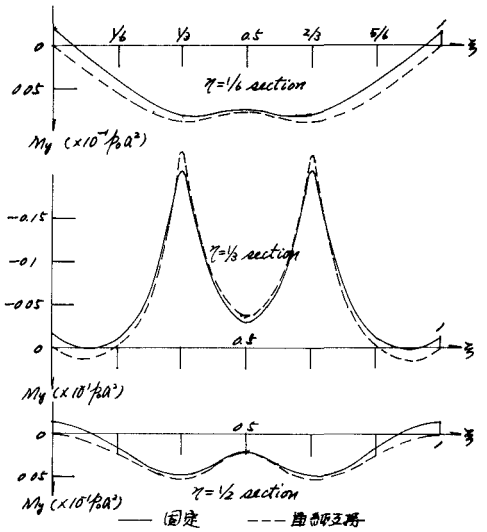


図-5 (曲げモーメント M_y)

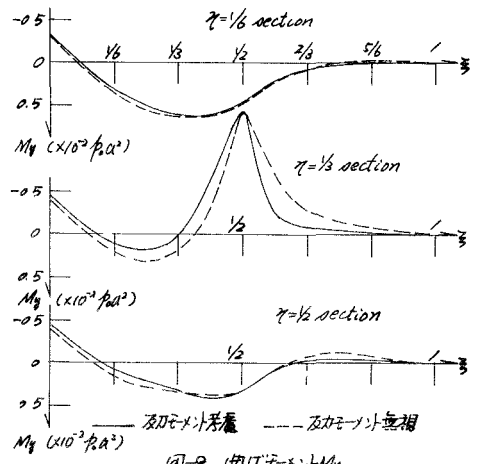
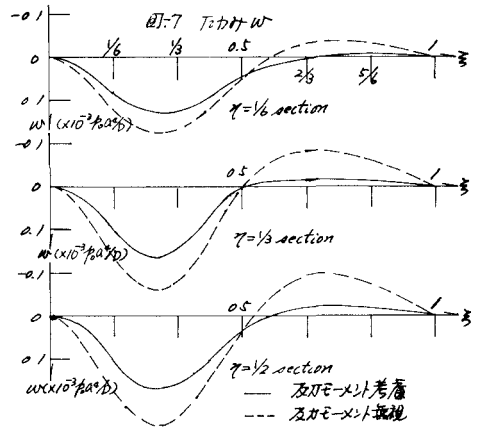


図-9 (曲げモーメント M_y)