

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 学生員 ○後藤恵之輔

1. 序言

構造物の座屈現象は、構造物が一体として座屈する全体座屈と構造物の構成要素が単独に座屈する局部座屈とに大別され、前者と同様、後者についても充分なる注意を払わねばならぬことは言うまでもない。したがって、構造物構成要素の座屈応力およびこれを与える座屈荷重を算定することは、設計者ならびに研究者にとって重要な課題の一つである。

本論は、通常用いられる構成要素のうち、有孔板、なにかんづく二重連結領域をもつ平板を対象とし、これが一様周圧を受けるときの座屈荷重算定法を述べるもので、等角写像法を応用することにより二重連結領域をもつ平板が取り扱える可能となること、写像函数さえ求まれば本法の適用により任意形板の座屈荷重を容易に算定しうることも特色とするものである。

2. 解法

(1) 写像函数 内外周ともに任意形の二重連結領域の写像函数を求めることは極めて困難なるゆえ、本論では、内周が円で外周が任意形および内周が任意形で外周が円の2つを取り扱うこととし、これらの写像函数を求めれば、それぞれ以下のごとくである。

図-1(a)に示すごとく、中心に円孔をもちZ-面上の原点に中心をも有する隅を丸めた任意形板をZ-面上の環状領域に等角写像する函数は、文献(1)を参照して、次のごとく与えられる。

$$Z = H \sum_{n=1}^N a_n \zeta^n \quad (1.a)$$

ここに $Z = x + iy$, $\zeta = re^{i\theta}$, (x, y) 直向座標, (r, θ) : 極座標, $r_c \leq r \leq 1$ (r_c : 後述), $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a_n : 一般に複素数係数, N : 正整数, H : 平板の大きさを与える定数。

式(1.a)の係数 a_n は、式(1.a)において $r=1$ とおくことによりえられる曲線が、任意の曲率半径をもつ外周境界 (L) 上の与えられた一連の点を通過すべき条件より決定される。中心の円孔 (L_c) は、式(1.a)

において $r=r_c$ とおき r_c に1より小さいある値 ($0 < r_c < 1$) を与えることにより、 r_c の高次の項が1次の項に比べて極めて小となるために近似的に求めることができる。

次に、図-1(b)のごとき中心に隅を丸めた任意形孔をもつ円板の写像函数も、上記と同様にして次のごとく与えられる。

$$Z = H \left(a_1 \zeta + \sum_{n=2}^N a_n \zeta^{-n} \right) \quad (1.b)$$

ここに $\zeta = re^{i\theta}$ の r の範囲は $1 \leq r \leq r_0$ (r_0 : 後述) である。

式(1.b)の係数 a_1 , a_n は、式(1.b)において $r=1$ とおくことによりえられる曲線が、任意の曲率半径をもつ内周境界 (L) 上の与えられた一連の点を通過すべき条件より決定される。また、外周の円 (L_0) は、式(1.b)において $r=r_0$ とおき r_0 に1より大きいある値 ($1 < r_0 < \infty$) を与えることに

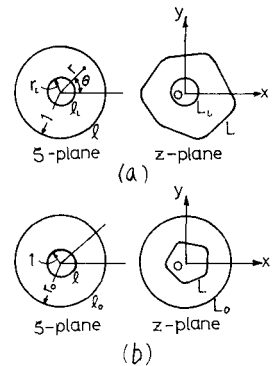


図-1

より、16. の1次の項が高次の項に比べて極めて大となるために近似的にえられることになる。

(2) 基礎方程式 二重連結領域をもつ薄い弾性平板に一樣周圧のみが作用するときの基礎微分方程式は、周知のごとく次式で与えられる。

$$\nabla^4 w(x, y) + Pt/D \cdot \nabla^2 w(x, y) = 0 \quad (2)$$

ここに w : 板のたわみ, D : 板の曲げ剛性, t : 板厚, P : 単位面積当りの一樣周圧

式(2)を複素数表示して次式もうる。

$$16 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}(z, \bar{z}) + 4 \frac{Pt}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = 0 \quad (3)$$

ここにバー符号はその変数または函数が共役数であることを示す。

式(1)で与えられる写像函数も一般に次式のごとく表示する。 $z = \omega(\zeta)$ (4)

しかるとき、式(3)は式(4)を用いて次式に変換される。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}^2} \frac{dZ}{d\zeta} \frac{d\bar{Z}}{d\bar{\zeta}} - \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}} \frac{dZ}{d\zeta} \frac{d^2 \bar{Z}}{d\bar{\zeta}^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}^2} \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} \frac{d\bar{Z}}{d\bar{\zeta}} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} \frac{d^2 \bar{Z}}{d\bar{\zeta}^2} + \frac{Pt}{4D} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \left(\frac{dZ}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

一方、境界条件として固定支持および単純支持を取扱うことにすれば、これらは (x, y) 座標により次式で与えられる。

固定支持: $w(x, y) = 0, \partial w(x, y) / \partial \xi = 0$ (6.a) 単純支持: $w(x, y) = 0, M_\xi(x, y) = 0$ (6.b)

ここに ξ : 境界に立てた法線方向

式(6)を $(\zeta, \bar{\zeta})$ 座標に変換して次式もうる。

固定支持: $w(\zeta, \bar{\zeta}) = 0, \partial w(\zeta, \bar{\zeta}) / \partial \zeta = 0$ (7.a) 単純支持: $w(\zeta, \bar{\zeta}) = 0, M_\nu(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$ (7.b)

したがって、式(5)の基礎微分方程式と式(7)の境界条件とも同時に満足するたわみ函数 $w(\zeta, \bar{\zeta})$ を求めれば、問題は解けることになる。しかし、かかる $w(\zeta, \bar{\zeta})$ を一般的に決定することは極めて困難であるゆえ、本論文は、エネルギー法の代表的な手法の一つである Rayleigh-Ritz法を適用して座屈荷重を近似的に算定する解法を述べる。

(3) Rayleigh-Ritz法 平板の曲げによるひずみエネルギーおよび座屈の際に応力がなす仕事もそれぞれ V, T とすれば、これらは (x, y) 座標により次式で与えられる。

$$V = \frac{D}{2} \int_S \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right\} dS \quad (8.a)$$

$$T = \frac{t}{2} \int_S \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \quad (8.b)$$

ここに σ_x, σ_y : 直応力, τ_{xy} : せん断応力, ν : ポアソン比, S : 積分すべき板の領域
一樣周圧のとき、式(8.b)は次式となる。

$$T = \frac{Pt}{2} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \quad (8.c)$$

式(8.a), (8.c)を複素数表示すれば、次式がえられる。

$$V = 4D \int_S \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 + (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 \right\} \right\} dS \quad (9.a)$$

$$T = 2Pt \int_S \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dS \quad (9.b)$$

さらに、式(4)も考慮すれば、結局 $(\bar{r}, \bar{\theta})$ 座標でのエネルギー式として次式もつる。

$$V = 4D \int_S \left\{ 2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{r}^2} \frac{1}{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})} \right\}^2 + (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{r}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\theta}^2} \left\{ \frac{1}{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})} \right\}^2 - \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{r}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{\theta}^2} - \omega'(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r}) \right\}}{\{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})\}^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial \bar{r}} \frac{\partial w}{\partial \bar{\theta}} \frac{\omega''(\bar{r}) \bar{\omega}''(\bar{r})}{\{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})\}^4} - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{r} \partial \bar{\theta}} \frac{1}{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})} \right\}^2 \right\} dS \quad (10.a)$$

$$T = 2Pt \int_S \frac{\partial w}{\partial \bar{r}} \frac{\partial w}{\partial \bar{\theta}} \frac{1}{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})} dS \quad (10.b)$$

ここに Re は $\{ \}$ 内の函数の実数部も、フライム符号は $()$ 内の変数による微分も、それぞれ表わす。
 周辺固定の場合には、式(10.a)は次のごとく簡単になる。

$$V = 8D \int_S \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{r}^2} \frac{1}{\omega(\bar{r}) \bar{\omega}'(\bar{r})} \right\}^2 dS \quad (10.c)$$

たわみ函数 w は、 w_k も境界条件のみを満足する独立な函数として、 w_k の一次結合により次式のごとく仮定される。

$$w = \sum_{k=1}^K b_k w_k \quad \text{ここに } b_k: \text{未定係数} \quad (11)$$

与えられた平板のもつ全ポテンシャルエネルギーを Π とすれば、問題は与えられた境界条件のもとに Π の停留値を求めることに帰着し、停留条件 $\delta \Pi = 0$ が成立する。したがって、すべての b_k に関し 1 次の方程式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_k} = \frac{\partial V}{\partial b_k} - \frac{\partial T}{\partial b_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad (12)$$

式(12)より $(K \times K)$ の係数行列式が与えられ、この式の最低根が所要の座屈荷重 (P_k) も与えることになる。

たわみ函数 w を仮定する場合、座屈荷重が最小となるごとく仮定することは勿論であるが、最小の座屈荷重を与える座屈形式として、通常、対称座屈が考えられるゆえ、本論では対称座屈のみを取扱うことにする。

単純支持の場合には、変分学の教えるところにより、式(7.b)の境界条件のうち、力学的境界条件(自然境界条件) $M_r = 0$ も満たすことは必ずしも必要ではないゆえ、幾何学的境界条件 $w = 0$ のみを満足するたわみ函数を仮定すればよい。これを考慮しつつ、式(1.a)で表わされる円孔をもつ任意形状につき、各種境界条件のもとにたわみ函数を仮定すれば、次のごとくである。

$$\text{内外周ともに固定の場合: } w = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k]^2 [r_0^{2k} - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k]^2 \quad (13.a)$$

$$\text{内周固定, 外周単純支持の場合: } w = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k] [r_0^{2k} - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k]^2 \quad (13.b)$$

$$\text{内外周ともに単純支持の場合: } w = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k] [r_0^{2k} - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k] \quad (13.c)$$

$$\text{内周単純支持, 外周固定の場合: } w = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k]^2 [r_0^{2k} - (\bar{r}/\bar{r}_0)^k] \quad (13.d)$$

なお、式(1.b)で与えられる任意形状をもつ円板の場合には、式(13)中の r_0 を r_0 に、内周を外周に、かつ外周を内周にそれぞれ置き換えればよい。

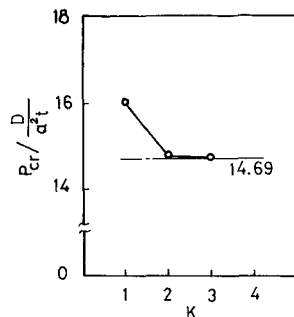
3. 精度の吟味

本法の精度を吟味するため、周辺固定および周辺単純支持の円板、周辺固定の正方形板と正八角形板(いずれも孔なし)の座屈荷重 P_{cr} を算定し、既往の解と比較すれば、以下のごとくである。

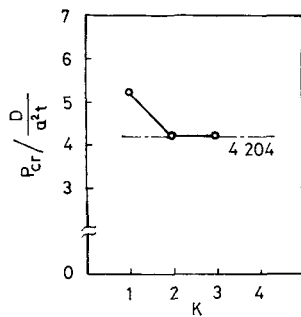
(1) 円板 円板の写像函数は、半径を a として次式で与えられる。

$$Z = a\bar{r} \quad (14)$$

式(10), (13) および (14) と式(12) より, 各境界条件に対して座屈荷重 P_{cr} が決定される。 $P_{cr} \cdot a^2 / D$ の K に対する変化を図-1に示すが(ただし, $\nu = 0.3$) , 図中1点鎖線は文献(2)の値であり, $K=2$ でかなり高精度の解が与えられることがわかる。



(a) 周辺固定



(b) 周辺単純支持

(2) 隅も丸めた正方形板および正八角形板 一般に,

隅も丸めた正多角形板の写像函数は, 文献(3)より次のごとく与えられる。

$$Z = 2a(Az + Bz^{m+1} + Cz^{2m+1} + \dots) \quad (\text{有限}) \quad (15)$$

ここに a : 正多角形の辺心距, m : 正多角形の辺数, $A, B, C, \dots$: 実数係数

隅の丸味 $\rho = R/2a$ (R : 隅半径) が 0.20 の正方形板および $\rho = 0.125$ の正八角形板の写像函数の係数値を最初の3項のみ示せば, それぞれ $A = 0.538114$, $B = -0.051244$, $C = 0.009779$ および $A = 0.510769$, $B = -0.013651$, $C = 0.004041$ となり, 4項以下の係数は前3項に比べて無視しうる。よって, これら3項を用いて P_{cr} を算定し K を変数として示せば, 図-2および図-3も2, $K=3, 4$ ではほぼ正確な値が与えられることが認められる。なお, 図中の1点鎖線は, それぞれ妹沢氏の尖角をもつ形状($\rho=0$)に対する厳密解⁴⁾および Lauraらの Galerkin法による隅の丸味を未考慮の近似解⁵⁾である。

4. 算例 省略

5. 結び

本法は, 他の固有値問題, たとえば有孔板の固有振動数の算定にも拡張でき, また, 一樣周圧以外の荷重条件における対称座屈が起ると考えられる板にも適用しうるものである。

参考文献 1) 山崎・後藤・中沢, 九大工学集報, 43-2,

昭45年4月(EP刷中)。2) 長柱研究委員会: 弾性安定要覧, 昭35年。3) T. Yamasaki & K. Gotoh, 才15回橋梁構造工学研究発表会論文論文集, 昭45年(EP刷中)。4) 妹沢, 造船協会報, 49号, 昭7年。5) P. A. Laura & P. Shakhdy, Proc ASCE, 95-EM1, Feb. 1969。

図-1

図板(孔なし)

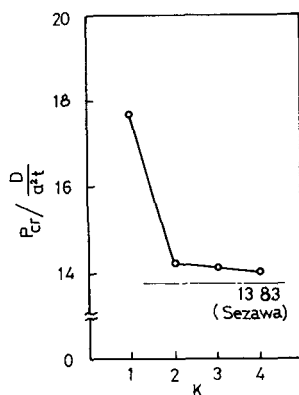


図-2 周辺固定の正方形板(孔なし)

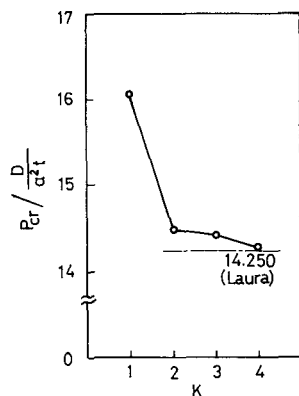


図-3 周辺固定の正八角形板(孔なし)