

宮崎大学工学部 正会員 太田俊昭

宮崎大学工学部 学生員 〇竹中重之

1. 序言

先に著者らは¹⁾、微小変形理論によって鋼材の弾塑性解析を行い軸力を受ける場合には、通常無視しうる残留応力の影響が、著しく大となり解析にあたってそれを無視することは正しくないことを明らかにしたが、本論文では有限変形理論を用いて軸力と曲げモーメントの組合せ変動荷重を受ける鋼材の弾塑性挙動の解明を行い、残留応力の影響の吟味・検討を試みるものとする。

2. 基礎的考察

(1) 残留応力

鋼材の残留応力として最も一般的は冷却残留応力について考察する。一般にH形鋼の冷却残留応力は、図-1のように分布することが知られており、Webの残留引張応力を σ_t ；Flange最両端の残留圧縮応力を σ_{rc} とすれば、力の釣合い条件より次式が成立する。

$$\int \sigma_r dA_0 = 0 \quad \text{----- (1)}$$

ここに、Web部； $\sigma_r = \sigma_t$

$$\text{Flange部； } \sigma_r = \sigma_t(1 - x/b_2) - \sigma_{rc} \cdot x/b_2 \quad \text{----- (2)}$$

式(1)、(2)より、 σ_t と σ_{rc} とに關して次式をうる。

$$\sigma_{rc} = bt/(bt + w(h - 2t)) \sigma_t \quad \text{----- (3)}$$

ただし、 $\bar{\sigma}_t = \sigma_t/\sigma_y$ ， $\bar{\sigma}_{rc} = \sigma_{rc}/\sigma_y$ ， σ_y ：降伏応力

よって、式(2)、(3)より、任意点の残留応力 σ_r が σ_{rc} を用いて次のように求められる。

Web部； $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_{rc}$

$$\text{Flange部； } \bar{\sigma}_r = \{(1 - \bar{x}) \bar{\sigma}_0 - \bar{x}\} \bar{\sigma}_{rc} \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 $\bar{x} = x/b_2$ ， $\bar{\sigma}_0 = bt/(bt + w(h - 2t))$

さて、一般に鋼材の応力-ひずみ曲線は、ひずみ硬化の影響 μ を考慮すれば、図-2のようなBilinearの折線で与えられるから、式(2)の初期残留応力があつた場合には、引張降伏応力は $(\sigma_y - \sigma_r)$ に、圧縮降伏応力は、 $(-\sigma_y - \sigma_r)$ に、それぞれ減少する（図-3参照）。

したがって、純曲げモーメントを受けるH形鋼の応力分布は図-4に示すような複雑な形となり、軸力と曲げモーメントの組合せ負荷の場合には更に複雑多様となる。

(2) 曲率の算定

著者らは文献(1)の曲率算定法を用いれば、簡単な (σ, ϵ) 座標の平行移動を施すことにより、任意の残留応力分布を有するはりの曲率の自動的算定が可能であることを確認した。

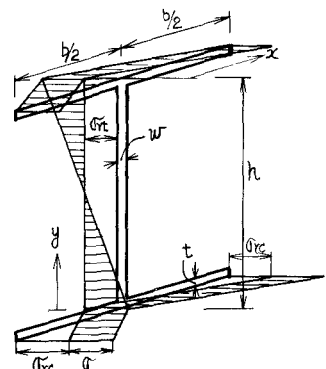


図 - 1

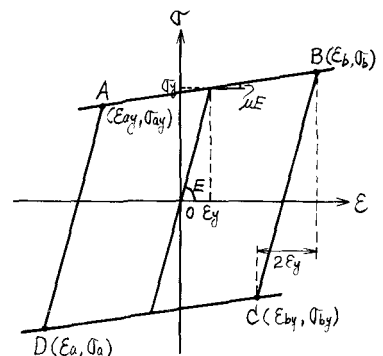
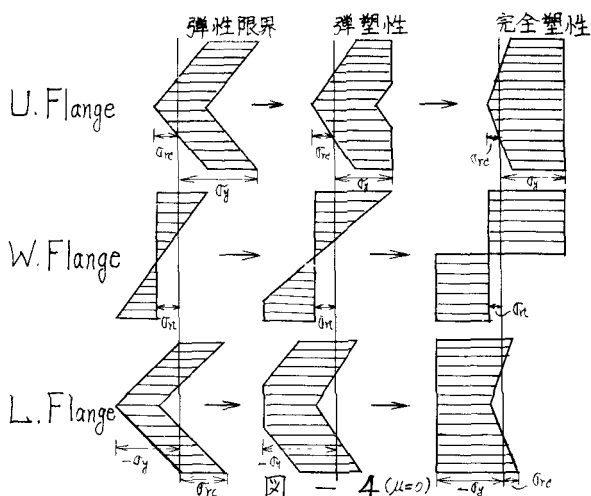
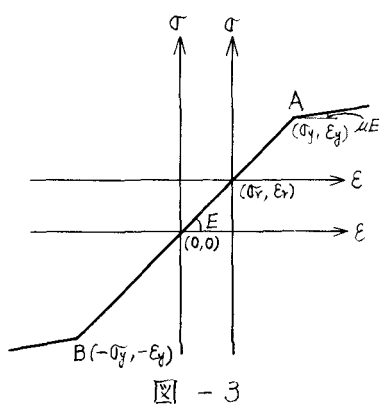


図 - 2



すなわち、初期残留応力 σ_r を有する鋼材の応力-ひずみ曲線式は

$$\text{弾性領域} \quad \bar{\sigma} = \bar{\epsilon} \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{弾塑性領域} \quad \bar{\sigma} - (\pm 1 - \bar{\sigma}_r) = \mu \{ \bar{\epsilon} - (\pm 1 - \bar{\epsilon}_r) \} \quad \text{----- (6)}$$

ここに $\bar{\epsilon}_r = \epsilon_r / \epsilon_y = \bar{\sigma}_r$, ϵ_y : 降伏ひずみ

で与えられるから、弾性および弾塑性領域の応力-ひずみ曲線式を包括する一般式として次式を導入する。

$$\bar{\sigma} = \mu (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^*) \quad \text{----- (7)}$$

ただし、 μ , $\bar{\epsilon}^*$ は表-1 の内容をもつ。

しかるに、式(7) は文献(1)の式(1)と全く同じ形式となる。

よって、任意の曲げモーメント M と軸力 N とを受ける場合の曲率 ϕ と図心点のひずみ ϵ_n が文献(1)より次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \epsilon_n \end{pmatrix} = (G_0) + (H_0) \begin{pmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \end{pmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

$$(G_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix}$$

$$(H_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \epsilon_y / \phi_y h$$

$$\alpha_2 = -h N_y / 2 M_y$$

$$\bar{N} = N / N_y, \bar{M} = M / M_y, \phi = \phi / \phi_y, \bar{\epsilon}_n = \epsilon_n / \epsilon_y$$

$$N_y; \text{降伏軸力}, M_y; \text{降伏曲げモーメント}, \phi_y; \text{降伏時の曲率}, A_0; \text{断面積}$$

また、行列要素 g_{ij} および f_{ij} は表-2 に示す内容となる (H 形鋼について求めた場合)。

	μ	$\bar{\epsilon}^*$
A ~ B	μ	$\epsilon_{ay} - \sigma_{ay} / \mu$
B ~ C	1	$\epsilon_b - \sigma_b$
C ~ D	μ	$\epsilon_{by} - \sigma_{by} / \mu$
D ~ A	1	$\epsilon_a - \sigma_a$

表 - 1

q_{11}	$\frac{w\Delta h/2A_0}{2t\Delta b/w\Delta h} \left\{ \sum_{U.F.} \{ \bar{L}_j(1-\bar{y}_j) + \bar{L}_{j+1}(1-\bar{y}_{j+1}) \} + \sum_{B.F.} \{ \bar{h}_1(\bar{L}_j + \bar{L}_{j+1}) + \bar{h}_2(\bar{L}_j + \bar{L}_{j+1}) \} \right\}$	q_{21}	$\frac{w\Delta h\bar{Q}_y/6M_y}{6t\Delta b/w\Delta h} \left\{ \sum_{U.F.} \{ \bar{L}_j(3\bar{y}_j + \Delta\bar{h})(1-\bar{y}_j) + \bar{L}_{j+1}(3\bar{y}_j + 2\Delta\bar{h})(1-\bar{y}_{j+1}) \} + \bar{h}_1\bar{h}_2 \sum_{B.F.} \{ \bar{L}_j + \bar{L}_{j+1} \} \right\}$
q_{12}	$\frac{w\Delta h/2A_0}{2t\Delta b/w\Delta h} \left\{ \sum_{U.F.} \{ \bar{L}_j\bar{y}_j + \bar{L}_{j+1}\bar{y}_{j+1} \} + \sum_{B.F.} \{ \bar{h}_2(\bar{L}_j + \bar{L}_{j+1}) + \bar{h}_1(\bar{L}_j + \bar{L}_{j+1}) \} \right\}$	q_{22}	$\frac{w\Delta h\bar{Q}_y/6M_y}{6t\Delta b/w\Delta h} \left\{ \sum_{U.F.} \{ \bar{L}_j(3\bar{y}_j + \Delta\bar{h})\bar{y}_j + \bar{L}_{j+1}(3\bar{y}_j + 2\Delta\bar{h})\bar{y}_{j+1} \} + \bar{h}_2^2 \sum_{B.F.} \{ \bar{L}_j + \bar{L}_{j+1} \} + \bar{h}_1^2 \sum_{B.F.} \{ \bar{L}_j + \bar{L}_{j+1} \} \right\}$
f_{11}	$\frac{w\Delta h/2A_0}{2t\Delta b/w\Delta h} \left\{ \sum_{U.F.} \{ \bar{L}_j\bar{E}_{xj}^* + \bar{L}_{j+1}\bar{E}_{xj+1}^* \} + \sum_{B.F.} \{ \bar{L}_j\bar{E}_{xj}^* + \bar{L}_{j+1}\bar{E}_{xj+1}^* \} \right\}$	f_{12}	$\frac{w\Delta h\bar{Q}_y/6M_y}{6t\Delta b/w\Delta h} \left\{ \sum_{U.F.} \{ \bar{L}_j(3\bar{y}_j + \Delta\bar{h})\bar{E}_{xj}^* + \bar{L}_{j+1}(3\bar{y}_j + 2\Delta\bar{h})\bar{E}_{xj+1}^* \} + \bar{h}_2 \sum_{B.F.} \{ \bar{L}_j\bar{E}_{xj}^* + \bar{L}_{j+1}\bar{E}_{xj+1}^* \} + \bar{h}_1 \sum_{B.F.} \{ \bar{L}_j\bar{E}_{xj}^* + \bar{L}_{j+1}\bar{E}_{xj+1}^* \} \right\}$

$\Delta h = \Delta h/h$, $\Delta h, \Delta b$; Web と Flange の分割長さ, h_1, h_2 ; 上下 Flange 中心軸のy値 表-2

3. 解法

(1) 片持ばり

図-5のごとく一定の水平集中荷重 N_0 と漸増ならびに変動鉛直集中荷重 P を受ける片持ばりの弾塑性挙動を有限変形理論に基づいて解明すれば以下のようなになる。

はりを n 等分し第 i 分割点のモーメント M_i と軸力 N_i を求めれば

$$\left. \begin{aligned} M_i &= M_{i+1} - \bar{\lambda} \bar{P}(1 + \bar{\epsilon}_n) \cos \theta_i - \bar{\lambda} \bar{N}(1 + \bar{\epsilon}_n) \sin \theta_i \\ N_i &= \bar{P} \sin \theta_{i-1} / \gamma - \bar{N}_0 \cos \theta_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、 $\bar{P} = P/P_y$, $\bar{N}_0 = N_0/P_y$, $\gamma = N_y l / M_y$, θ_i ; 第 i 番目の分割部が水平軸となす角

一方、式(9)の M と N によって、はりに生じり補正エネルギー $\bar{C}$ は一般に次式で与えられる。

$$\bar{C} = \iint \phi(1 + \epsilon_n) dM dS + \iint \epsilon_n dN dS - \int \theta \frac{dM}{dS} dS + \int (N - N_0) dS \quad (10)$$

よって、変形の適合条件式 $\partial \bar{C} / \partial M_i = 0$ より未知交角 θ_i が次のようにえられる。

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial M_i} = \int \phi(1 + \epsilon_n) \frac{\partial M}{\partial M_i} dS - \int \frac{d}{dM_i} \left(\theta \frac{dM}{dS} \right) dS \quad (11)$$

上式をシンプソン公式を用いて変形し整理すれば、結局次式をうる。

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \frac{\partial}{\partial \theta_i} \{ \phi_{i-1}(1 + 0.5\epsilon_{n(i-1)} + 0.5\epsilon_{ni}) + \phi_i(4 + 0.5\epsilon_{n(i-1)} + 3\epsilon_{ni(i-1)} + 0.5\epsilon_{n(i+1)}) + \phi_{i+1}(1 + 0.5\epsilon_{ni} + 0.5\epsilon_{n(i+1)}) \} \quad (12)$$

また、自由端のため $\bar{\sigma}_B$ は、変分原理より

$$\bar{\sigma}_B = \frac{\partial \bar{C}}{\partial P} = \int_0^l \phi(1 + \epsilon_n) \frac{\partial M}{\partial P} dS$$

$$\bar{\sigma}_B = -\phi_0 l \left[\sum_{k=1}^n \phi_k (1 + \epsilon_n) \lambda_k^* \cos \theta_i \right] \quad (13)$$

以上から、試索算法によって容易に所要の応力は $\bar{\sigma}_B$ に変形が算定可能となる。

図-6, 7はそれぞれ漸増および変動曲げを受ける場合の荷重-たわみ曲線をプロットしたものである。

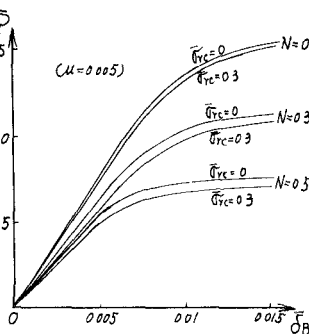


図-6

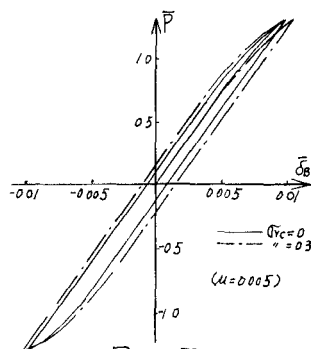


図-7

(2) 連続ばり

図-8 に示す連続ばりについて考察する。はり AB および BC のモーメント M は文献(3)より次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} A \sim B \quad \bar{M} = gM_B + M_0 \\ B \sim C \quad M = fM_B + M_0 \end{array} \right\} \text{----- (14)}$$

ただし、 $g = -D_i/D_n$, $f = 1 - D_i/D_n$

$$D_i = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_i$$

$$D_n = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_i + \dots + \cos \theta_n$$

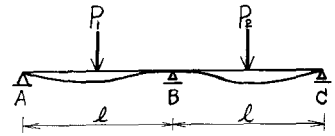


図 - 8

一方、変分原理を用いて支点B のたわみ角を求めれば

$$\begin{aligned} \theta_{BA} &= l \phi_y \left\{ \int_{BA} \varphi (1 + \epsilon_n) \frac{\partial \bar{M}}{\partial M_B} d\bar{s} \right\} = l \phi_y \int_{BA} (\varphi^e + \varphi^p) (1 + \epsilon_n) g d\bar{s} \\ &= l \phi_y \int_{BA} (gM_B + M_0 + \varphi^p) (1 + \epsilon_n) g d\bar{s} = l \phi_y (\alpha_1 M_B + C_1 + P_1) \text{----- (15)} \end{aligned}$$

同様に、

$$\theta_{BC} = l \phi_y (\alpha_2 M_B + C_2 + P_2) \text{----- (16)}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \quad \alpha_1 &= \int_{BA} (1 + \epsilon_n) g d\bar{s} & \alpha_2 &= \int_{BC} (1 + \epsilon_n) f d\bar{s} \\ C_1 &= \int_{BA} \varphi^p (1 + \epsilon_n) g d\bar{s} & C_2 &= \int_{BC} \varphi^p (1 + \epsilon_n) f d\bar{s} \\ P_1 &= \int_{BA} M_0 (1 + \epsilon_n) g d\bar{s} & P_2 &= \int_{BC} M_0 (1 + \epsilon_n) f d\bar{s} \\ \varphi &= \varphi^e + \varphi^p \\ \varphi^e; \text{弾性曲率} \quad \varphi^p; \text{塑性曲率} \quad M_0; \text{荷重項} \end{aligned}$$

連続条件 $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ より、不静定力 M_B が下記の式で与えられる。

$$M_B = \frac{C_1 + C_2 + P_1 + P_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \text{----- (17)}$$

よって、式(17)を用いれば片持ばりの場合と同様にして連続ばりの弾塑性挙動を解明でき、そのフローチャートは図-9 のようになる。

4. 結言

本論文は鋼材の片持ばりおよび2スパン連続ばりの弾塑性有限変形について理論的考察を行おうと共に残留応力の曲げ剛性に及ぼす影響について吟味・検討したもので本研究の結果、残留応力による曲げ剛性の低下は塑性領域において大となり、かつこの傾向は(軸力+変形)の2次の効果としての有限変形によって著しくなり、完全塑性モーメント値には、ほとんど影響を与えないことが判明した。

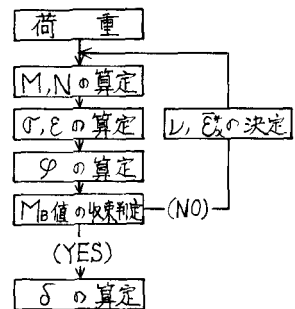


図 - 9

なお、本研究に文部省科学研究費の援助を受けたことを記し、ここに謝意を表す。

(参考文献) 1) 太田: 残留応力の影響を考慮した鋼材の弾塑性解析, 第19回応用力学連合講演会論文集 (昭和44年10月)

2) 山崎・太田・石川: 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号 (昭和41年10月)

3) 太田・藤本: 有限変形を考慮した滑組構造物の弾塑性解析, 土木学会面支部研究発表会論文集 (昭和45年2月)