

宮崎大学 工学部 正員 太田 俊昭

宮崎大学 工学部 学生員 伊集院久光

I. 緒言 一様な断面棒の弾塑性捩り解析に関する研究は少なく、今日のところ Sokolovsky²⁾の卵形断面を対象とした厳密理論解¹⁾、Hodge³⁾らの正方形、並びに十字形断面に対する数値解、および山崎、太田の矩形断面に対する近似理論解などが見受けられるに過ぎない。本研究はこれらの解法と異なり一様な任意形断面棒の弾塑性捩り挙動を説明すべく、膜理論を用いて差分法による捩り応力と変形の解法を確立し、そのプログラムを製作したもので応用例として正方形および矩形断面棒を選び捩りモーメント T の増加に伴う捩れ変形ならびに降伏領域の遷移状況を明らかにし、併せて T と捩れ角 ω との近似式を誘導し、実用に便ならしめたものである。

II. 基礎的考察 一様な任意形断面と考へ、直交座標 (x, y, z) を図-1のように設定する。この棒が z 軸のまわりに T なる一様な捩りモーメントで捩られ、 y 軸および z 軸方向にせん断応力 τ_{yx} および τ_{zx} を生じたと仮定する。

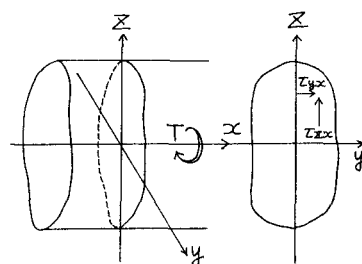


図-1

まず、弾性域ではせん断応力に関して次の平衡条件式が成立する。すなわち、

$$\partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z = 0 \quad \text{----- (1)}$$

ここで、式(1)を満足する弾性応力関数 χ^e を考えれば、 $\tau_{xy} = \partial \chi^e / \partial z$ 、 $\tau_{zx} = -\partial \chi^e / \partial y$ のように示され、またこれらに対応するせん断ひずみ γ_{xy} 、 γ_{zx} は一般に次の式で与えられる。

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / \tau = \partial U / \partial y - \omega z, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / \tau = \partial U / \partial z + \omega y \quad \text{----- (2)}$$

ただし、 U : 断面のゆがみ、 τ : せん断弾性係数、 ω : 単位長さ当りの捩れ角

よって式(2)の χ^e を z で偏微分して加算のうえ応力関数 χ^e で置換すれば次式となる。

$$\partial^2 \chi^e / \partial y^2 + \partial^2 \chi^e / \partial z^2 = -2\omega \tau \quad \text{----- (3)}$$

すなわち、式(3)は一様な単位張力で張られた石ケン膜が上向きに圧力 $2\omega \tau$ を受けたときの膜のたわみが満たす条件式を表わし、 χ^e はかかる膜のたわみで与えられることが分かる。

次に捩りモーメント T が増大し、断面の一部の応力が降伏して塑性域が生じた場合を想定すればミーゼスの降伏条件より

$$\sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2} = K \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 $K = \sigma_Y / \sqrt{3}$ ($= \tau_Y$)、 σ_Y : 降伏垂直応力、 τ_Y : 降伏せん断応力

塑性域の応力関数 χ^p と弾性応力関数 χ^e と同様

$$\partial \chi^p / \partial z = \tau_{xy}, \quad \partial \chi^p / \partial y = -\tau_{zx} \quad \text{----- (5)}$$

とおけば、式(4)は次のように変形される。

$$\{(\partial \chi^p / \partial y)^2 + (\partial \chi^p / \partial z)^2\}^{1/2} = |\text{grad } \chi^p| = \text{Max } |\partial \chi^p / \partial z'| = K \quad \text{----- (6)}$$

ただし、 z' は任意の方向をとる座標軸である。

すなわち、弾性応力関数 χ^p は χ^e を任意の方向に偏微分したときの最大値が常に一定値 K となる。これより全断面が塑性域のいわゆる完全塑性の場合は χ^p は例えば円板では図-2(c)のようになり、また矩形断面では図-3(c)のようになる。

よって、上述の膜理論を適用すれば、一般的な弾塑性応力状態の場合は膜のたわみが χ^p に接した部分が塑性域で、そうでない部分が弾性域を表わすことになる。(図-2(b) および図-3(b)参照)。

Ⅲ. 解法 軸対称となす円形断面を除けば一般に弾塑性境界は図-3(b)に示すように極めて複雑となるゆえ、かかる弾塑性境界をもつ膜の厳密なたわみ、すなわち χ^e を式(3)より解析的に求めることは不可能となる。そこで本研究では差分法を採用するものとする。

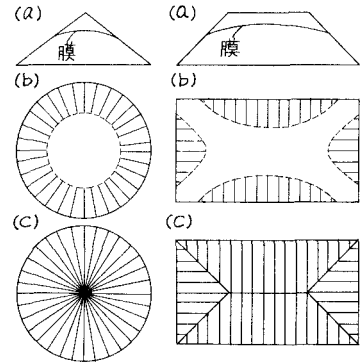


図-2

図-3

すなわち、式(3)の解をうるため次の手順で式(3)を差分方程式に変形する。

まず弾性応力関数 χ^e と $\chi^e = q a^2 \phi^e$ 、 x, y と $x = a \bar{x}$, $y = a \bar{y}$ とおいで式(3)を無次元化すれば

$$\partial^2 \phi^e / \partial \bar{x}^2 + \partial^2 \phi^e / \partial \bar{y}^2 = -2\omega$$

さらに弾性限界時の捩れ角を ω_Y とし、上式の両辺を ω_Y で除せば次のようになる。

$$\partial^2 \bar{\phi} / \partial \bar{x}^2 + \partial^2 \bar{\phi} / \partial \bar{y}^2 = -2\bar{\omega} \quad \text{---(7)}$$

$$\text{ただし、}\bar{\omega} = \omega / \omega_Y, \quad \bar{\phi} = \phi / \omega_Y$$

式(7)を差分方程式に変形すれば

$$4\bar{\phi}^e(i, j) - \bar{\phi}^e(i, j-1) - \bar{\phi}^e(i, j+1) - \bar{\phi}^e(i-1, j) - \bar{\phi}^e(i+1, j) = 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \quad \text{---(8)}$$

ただし、 i, j は断面を等分割した場合の任意の格点の位置を示し

$\bar{\lambda} = a\lambda$ で λ は分割区間の長さを表わす(図-4 参照)。

一方、塑性応力関数 χ^p はⅡの考察によれば断面の形状によって定まる常数となる。すなわち格点 (i, j) において

$$\chi^p(i, j) = C(i, j) \quad \text{---(9)}$$

式(9)を無次元化して

$$\bar{\phi}^p(i, j) = \bar{C}(i, j) \quad \text{---(10)}$$

$$\text{ただし、}\bar{\phi}^p = \chi^p / q a^2 \omega_Y, \quad \bar{C} = C / q a^2 \omega_Y$$

以上から 任意の格点 (i, j) において弾性および塑性応力関数いずれの場合にも適用できる一般式が次のように求められる。

$$\{4\alpha(i, j) + \beta(i, j)\} \bar{\phi}(i, j) - \alpha(i, j-1) \bar{\phi}(i, j-1) - \alpha(i, j+1) \bar{\phi}(i, j+1) - \alpha(i-1, j) \bar{\phi}(i-1, j) - \alpha(i+1, j) \bar{\phi}(i+1, j) = 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha(i, j) + \bar{C}(i, j) \beta(i, j) \quad \text{---(11)}$$

ただし、 $\alpha(i, j)$: 弾性域では $\bar{\phi}(i, j) < \bar{C}(i, j)$, $\alpha(i, j) = 1$, 塑性域では $\bar{\phi}(i, j) = \bar{C}(i, j)$, $\alpha(i, j) = 0$

$\beta(i, j)$: 弾性域では $\bar{\phi}(i, j) < \bar{C}(i, j)$, $\beta(i, j) = 0$, 塑性域では $\bar{\phi}(i, j) = \bar{C}(i, j)$, $\beta(i, j) = 1$

$\bar{\phi}(i, j) = \chi / q a^2 \omega_Y$: $\bar{\phi}^e$ および $\bar{\phi}^p$ を一般表示したもの。

式(11)を周辺を除く全格子点について求め 境界上の $\bar{\phi}$ と $\bar{\phi} = 0$ とおけば一般的に次の式が成立する。

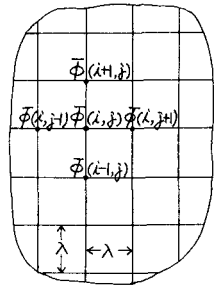


図-4

$$\begin{bmatrix} 4\alpha(1,1)+\beta(1,1) & -\alpha(1,2) & -\alpha(1,3) & \cdots & -\alpha(1,n) \\ -\alpha(2,1) & 4\alpha(2,2)+\beta(2,2) & -\alpha(2,3) & \cdots & -\alpha(2,n) \\ -\alpha(3,1) & -\alpha(3,2) & 4\alpha(3,3)+\beta(3,3) & \cdots & -\alpha(3,n) \\ -\alpha(4,1) & -\alpha(4,2) & -\alpha(4,3) & \cdots & -\alpha(4,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha(n,1) & -\alpha(n,2) & -\alpha(n,3) & \cdots & 4\alpha(n,n)+\beta(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}(1,1) \\ \bar{\phi}(2,2) \\ \bar{\phi}(3,3) \\ \bar{\phi}(4,4) \\ \vdots \\ \bar{\phi}(n,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha(1,1) + \bar{c} \beta(1,1) \\ 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha(2,2) + \bar{c} \beta(2,2) \\ 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha(3,3) + \bar{c} \beta(3,3) \\ 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha(4,4) + \bar{c} \beta(4,4) \\ \vdots \\ 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha(n,n) + \bar{c} \beta(n,n) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし、 n は分割数に關する整数。

さて、捩りモーメント T は理論より一般に次式で与えられる。

$$T = 2 \int \lambda dA = 2 \omega_r \bar{c} a^2 \int \bar{\phi} dA \quad (13)$$

式(13)を差分表示すれば

$$T = 2 \omega_r \bar{c} a^2 \bar{\lambda}^2 \sum \{ \bar{\phi}(i,j) + \bar{\phi}(i,j+1) + \bar{\phi}(i+1,j) + \bar{\phi}(i+1,j+1) \} \quad (14)$$

ここで、弾性限界時の捩りモーメント T_r を

$$T_r = 2 \omega_r \bar{c} a^2 \bar{\lambda}^2 B_0 \quad (15)$$

で表わせば式(14)は次のように無次元化される。

$$\bar{T} = T/T_r = \frac{1}{B_0} \sum \{ \bar{\phi}(i,j) + \bar{\phi}(i,j+1) + \bar{\phi}(i+1,j) + \bar{\phi}(i+1,j+1) \} \quad (16)$$

ここに B_0 は弾性限界時の条件、 $\alpha(i,j)=1$, $\beta(i,j)=0$, および $\bar{\omega}=1$, $\bar{T}=1$ を用いて式(12)(16)より定められる定数であり、また ω_r はこれらの $\bar{\phi}(i,j)$ を用いて式(6)より次のように決定される。

$$T_{\max} = \text{Max} \{ (\partial \bar{\phi} / \partial x)^2 + (\partial \bar{\phi} / \partial y)^2 \}^{\frac{1}{2}} \bar{c} a \omega_r = K$$

$$\therefore \omega_r = K / \bar{c} a \sqrt{A_0} \quad (17)$$

$$\text{ただし、} A_0 = \text{Max} \{ (\partial \bar{\phi} / \partial x)^2 + (\partial \bar{\phi} / \partial y)^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

よって、式(12)および(16)より所要の捩りモーメント T と ω との関係式が決定されることとなり、そのフローチャートを図-5に示す。

IV. 計算例

1) 正方形断面 $2a$ の辺長をもつ正方形断面について考察すれば次のとおりである。

いま断面を14等分し各格点の符号を図-6のように与えれば式(12)は断面形状の対称性より28元連立1次方程式となる。ここに右辺の右2項 $\bar{c}(i,j)$ は式(17)より一般に底面が $2a \times 2a$ で高さ $\sqrt{A_0} \bar{c} a \omega_r$ (ただし $A_0 = \frac{1}{4\bar{\lambda}^2} \{ 4\bar{\phi}(2,8) - \bar{\phi}(3,8) \}^2$) と有す正四角錐の点 (i,j) での屋根の高さで表わされることとなる。よって $\bar{\omega}$ を1.0から18.5まで0.1刻みで変化させて $\bar{T}-\bar{\omega}$ 曲線と求めれば式(12)および(16)より図-7の結果をうる。また図-8および図-9はそれぞれ $\bar{\omega}=1.3$, $\bar{\omega}=3.1$ の時の $\bar{\phi}$ 分布図ならびに塑性域の広がりを示したものである。以上の結果に最小自乗法を適用して正方形断面棒の $\bar{T}-\bar{\omega}$ 近似式と求めれば次式がえられる。ただし、捩り角の限界 $\bar{\omega}_\infty$ を18.5とする。

$$\bar{T} = 2.7108 - 0.0944 \frac{1}{\bar{\omega}} - 0.9626 \frac{1}{\bar{\omega}^2}, \quad (\text{誤差 } 1\%) \quad (18)$$

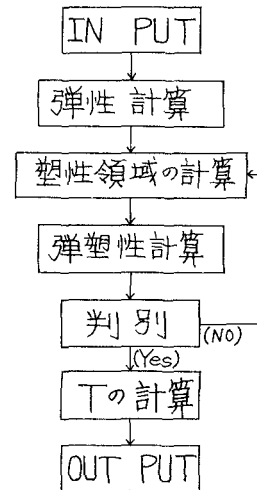


図-5 フローチャート

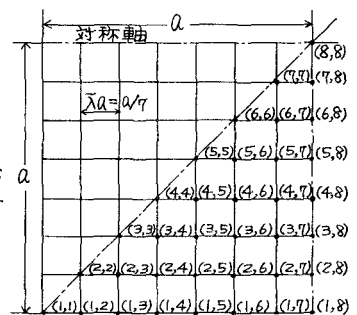


図-6

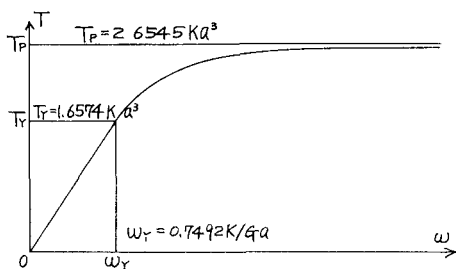


図-7

2) 矩形断面 $2a \times 2b$ (ただし $b/a=2$) の辺長をもつ矩形断面について考察すれば次のとおりである。

いま断面を短辺、長辺それぞれ8等分し各格点の符号を図-10のように与えれば式(12)は断面形状の対称性より32元連立方程式となる。ここに右辺の第2項 $\bar{\phi}(i, j)$ は式(17)

より一般に底面が $2a \times 2b$ の矩形の周辺から一定勾配 $\tan^{-1} \sqrt{A_0 G a \omega_Y}$ (ただし $A_0 = \frac{1}{4\pi} [4\bar{\phi}(2,9) - \bar{\phi}(3,9)]$) で立てられた屋根の点 (i, j) の屋根の高さで表わされることとなる。よって $\bar{\omega}$ を1.0より11.1まで0.1刻みで変化させて $T-\bar{\omega}$ 曲線を求めれば式(12)および(16)より図-11の結果をうる。また図-12および図-13はそれぞれ $\bar{\omega}=1.6$ および $\bar{\omega}=3.4$ の時の $\bar{\phi}$ 分布図ならびに塑性域の広がりを示したものである。以上の結果に最小自乗法を適用して矩形断面棒の $T-\bar{\omega}$ 近似式を求めれば次式がえられる。ただし 捩り角の限界 $\bar{\omega}_0$ を11.1とする。

$$T = 6.6857 - 0.1197 \frac{1}{\bar{\omega}} - 2.7397 \frac{1}{\bar{\omega}^2} \quad (\text{誤差 } 1\%) \quad (19)$$

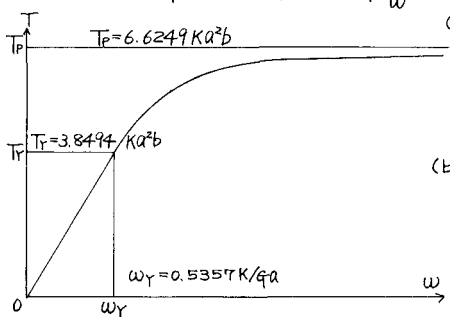


図-11

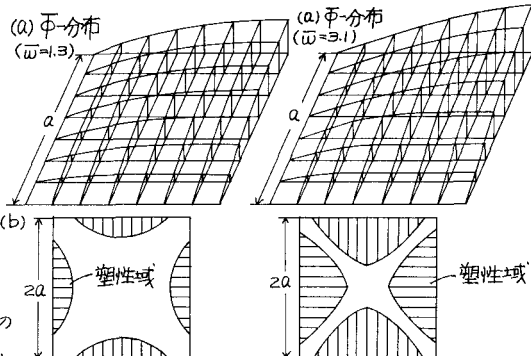


図-8

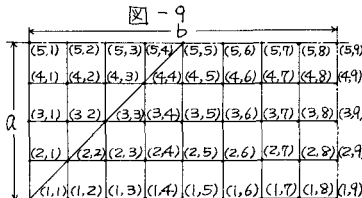


図-10

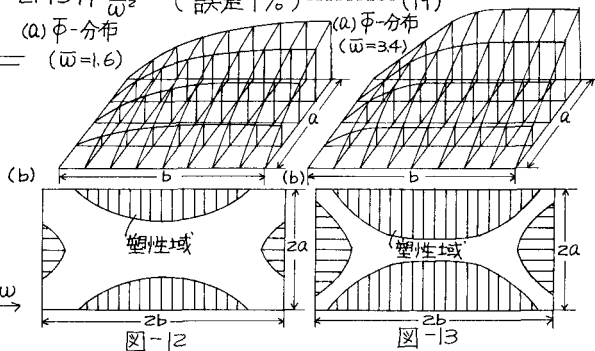


図-12

図-13

V. 結語 本研究によって一様な棒の複雑な捩り変形挙動や降伏領域の遷移状況が断面形の如何と問わず同一手法で自動的に追跡説明しうようになった。また $T-\bar{\omega}$ 近似式である式(18)(19)はいずれも正解と定性的に合致し、かつ T 値の誤差も高々1%に止まるゆえ、工学的に十分な精度を有する実用式であることが立証された。

- VI. 参考文献 1) Sokolovsky, V.V., "On a Problem of Elastic-Plastic Torsion", (Russian with English summary), Prikladnaya Matematika i Mekhanika, Vol. 6, 1942
2) Hodge, P.G., Jr., "Elastic-Plastic Torsion as a Problem in Nonlinear Programming," International Journal of Solids and Structures, Vol. 3, 1967
3) 山崎, 太田, "弾塑性捩りの補正エネルギーに対する実用式," 20回国土工学学会講演会講演概要, 昭和40年5月