

宮崎大学 工学部 正員 木田俊昭
宮崎大学 工学部 学生員の藤本 坦

I. 序言

骨組構造物の弾塑性解法に関する既往研究としては微小変形理論に基づく数多くの研究があるが、有限変形理論に基づくものは少く、わずかに堀井、河原¹⁾および著者らのものがみられるにすぎない。本研究は先に報告した補正エネルギー法を拡張して、高次不静定構造物の弾塑性有限変形を解明しようとしたもので、まず軸力と曲げモーメントの組合せ荷重を受ける直線部材を対象として、その有限変形を考慮した弾塑性たわみ角式を一般的に導き、ついでそのサブプログラムを作製して連続梁およびラーメンの弾塑性変形ならびに応力を電算機を用いて自動的に追跡しようとしたものである。

II. 弾塑性たわみ角式

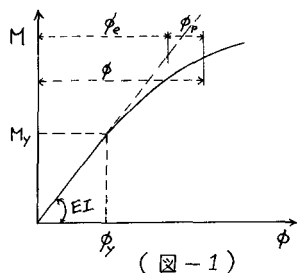
1) 曲率

一般に梁に働く曲げモーメントと曲率 ϕ の関係式は次の様に書き表わされる(図-1参照)。

$$\phi = \phi_e + \phi_p = M / EI + \phi_p \quad \text{--- (1)}$$

ただし、 ϕ_e : 弾性曲率 ϕ_p : 塑性曲率

E: 弾性係数 I: 断面二次モーメント



(図-1)

2) たわみ角式の誘導

直線部材のたわみ角式を誘導するにあたって、まず部材ABを図-2に示すようにN等分する。各等分点の曲げモーメントを $M_1, M_2, \dots, M_{N+1}$ とすれば、これらの間に次の式が成り立つ。

$$M_1 = M_{AB} + M'_0 + H_A y_1$$

$$M_2 = \lambda Q \cos \theta_1 + M_1 + M'_0 + H_A y_2 = \lambda Q \cos \theta_1 + M_{AB} + M'_0 + H_A y_2$$

$$M_3 = \lambda Q \cos \theta_2 + M_2 + M'_0 + H_A y_3 = \lambda Q (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + M_{AB} + M'_0 + H_A y_3$$

$$M_i = \lambda Q (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_{i-1}) + M_{AB} + M'_0 + H_A y_i \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{ここに、} Q = -(M_{AB} + M_{BA}) / \lambda f_N \quad \text{--- (3)}$$

$$f_i = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_{i-1}, \quad (i = 2 \sim N+1)$$

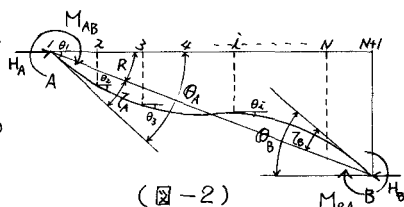
θ_i : 分割部材 $i, i+1$ の変形後の軸と水平軸のなす交角, y_i : 分割点 i のたわみ

M'_0 : 中間荷重による分割点 i のモーメント, λ : 分割部材長, H_A : A点の水平反力

式(2)に式(3)を代入して

$$M_i = (1 - f_i / f_N) M_{AB} + (-f_i / f_N) M_{BA} + M'_0 + H_A y_i$$

上式中で $(1 - f_i / f_N) = h_i$, $(-f_i / f_N) = g_i$ とおいて次式をうる。



(図-2)

$$M_x = h_x M_{AB} + g_x M_{BA} + M_0^x + H_A y_i \quad \text{--- (4)}$$

一方、式(4)のモーメントおよび軸力によって梁に貯えられる補正エネルギーは次式で与えられる。

$$C = \iint \phi (1 + \epsilon) dM ds + \iint \epsilon dN ds - \int \theta \frac{dM}{ds} ds + \int H (\cos \theta - 1) ds + \int V \sin \theta ds \quad \text{--- (5)}$$

よって変分原理により材端A, Bのたわみ角 $\bar{\theta}_A, \bar{\theta}_B$ が高次の微小項を省略して次のようにえられる。

$$\partial C / \partial M_{AB} = \bar{\theta}_A = \theta_A - R = \int \phi \partial M_x / \partial M_{AB} ds \quad \text{--- (6)}$$

$$\partial C / \partial M_{BA} = \bar{\theta}_B = \theta_B - R = \int \phi \partial M_x / \partial M_{BA} ds \quad \text{--- (7)}$$

式(6), 式(7)に $\partial M_x / \partial M_{AB} = h_x$, $\partial M_x / \partial M_{BA} = g_x$ および $\phi_x = \phi_{e_i} + \phi_{p_i}$ を代入して次式をうる。

$$\theta_A - R = \int (\phi_{e_i} + \phi_{p_i}) h_x ds \quad \text{--- (8)}$$

$$\theta_B - R = \int (\phi_{e_i} + \phi_{p_i}) g_x ds \quad \text{--- (9)}$$

ただし R : 部材回転角, θ_A, θ_B : 材端A, Bの回転角

さて、式(8), (9)に $\phi_{e_i} = M_x / EI = (h_x M_{AB} + g_x M_{BA} + M_0^x + H_A y_i) / EI$ を代入して変形すれば

$$\theta_A - R = \left\{ \int (h_x M_{AB} + g_x M_{BA} + M_0^x + H_A y_i) h_x ds \right\} / EI + \int \phi_{p_i} h_x ds$$

$$\theta_B - R = \left\{ \int (h_x M_{AB} + g_x M_{BA} + M_0^x + H_A y_i) g_x ds \right\} / EI + \int \phi_{p_i} g_x ds$$

よって

$$EI(\theta_A - R) = \left(\int h_x^2 ds \right) M_{AB} + \left(\int h_x g_x ds \right) M_{BA} + \left(\int M_0^x h_x ds + \int H_A y_i h_x ds + EI \int \phi_{p_i} h_x ds \right)$$

$$EI(\theta_B - R) = \left(\int h_x g_x ds \right) M_{AB} + \left(\int g_x^2 ds \right) M_{BA} + \left(\int M_0^x g_x ds + \int H_A y_i g_x ds + EI \int \phi_{p_i} g_x ds \right)$$

すなわち

$$\begin{cases} EK(\theta_A - R) = a M_{AB} + b M_{BA} + C_1 \\ EK(\theta_B - R) = b M_{AB} + d M_{BA} + C_2 \end{cases} \quad \text{--- (10)}$$

ただし $a = \int h_x^2 d\bar{s}$, $b = \int h_x g_x d\bar{s}$, $d = \int g_x^2 d\bar{s}$, $K = I / \ell$, $d\bar{s} = ds / \ell$, ℓ : 部材長

$$C_1 = \int M_0^x h_x d\bar{s} + \int H_A y_i h_x d\bar{s} + EI \int \phi_{p_i} h_x d\bar{s}, \quad C_2 = \int M_0^x g_x d\bar{s} + \int H_A y_i g_x d\bar{s} + EI \int \phi_{p_i} g_x d\bar{s}$$

式(10)を M_{AB}, M_{BA} について解けば

$$\begin{cases} M_{AB} = EK \left\{ \frac{-d}{\ell^2 - ad} \theta_A + \frac{b}{\ell^2 - ad} \theta_B + \frac{d - b}{\ell^2 - ad} R \right\} + \frac{d C_1 - b C_2}{\ell^2 - ad} \\ M_{BA} = EK \left\{ \frac{b}{\ell^2 - ad} \theta_A + \frac{-a}{\ell^2 - ad} \theta_B + \frac{a - b}{\ell^2 - ad} R \right\} + \frac{a C_2 - b C_1}{\ell^2 - ad} \end{cases}$$

こゝで $\alpha_{AB} = -d / (\ell^2 - ad)$, $\beta_{AB} = b / (\ell^2 - ad)$, $\alpha_{BA} = b / (\ell^2 - ad)$, $\beta_{BA} = -a / (\ell^2 - ad)$

$$\gamma_{AB} = (d - b) / (\ell^2 - ad), \quad \gamma_{BA} = (a - b) / (\ell^2 - ad)$$

$$C_{AB} = (d C_1 - b C_2) / (\ell^2 - ad), \quad C_{BA} = (a C_2 - b C_1) / (\ell^2 - ad)$$

とおいで次のたわみ角式をうる。

$$\begin{cases} M_{AB} = EK(\alpha_{AB} \theta_A + \beta_{AB} \theta_B + \gamma_{AB} R) + C_{AB} \\ M_{BA} = EK(\alpha_{BA} \theta_A + \beta_{BA} \theta_B + \gamma_{BA} R) + C_{BA} \end{cases} \quad \text{--- (11)}$$

式(11)を降伏曲げモーメント M_y で除して無次元化すれば結局次式がえられる。

$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \frac{1}{\omega} (\alpha_{AB} \theta_A + \beta_{AB} \theta_B + \gamma_{AB} R) + \bar{C}_{AB} \\ \bar{M}_{BA} = \frac{1}{\omega} (\alpha_{BA} \theta_A + \beta_{BA} \theta_B + \gamma_{BA} R) + \bar{C}_{BA} \end{cases} \quad \text{--- (12)}$$

ただし $\bar{M}_{AB} = M_{AB} / M_y$, $\bar{M}_{BA} = M_{BA} / M_y$, $\bar{C}_{AB} = C_{AB} / M_y$, $\bar{C}_{BA} = C_{BA} / M_y$, $\omega = \phi_y \ell = M_y / EK$

3) θ_i の算定

式(4)および式(12)を適用可能にするためには、あらかじめ未知数 θ_i を算出する必要がある。 θ_i の算定式は変形の適合条件 $\partial C / \partial M_i = 0$ より次のようにえられる。

$$\frac{\partial C}{\partial M_i} = \frac{\partial C}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_i} = \int \frac{\partial C}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_i} ds = \int \phi(1+\epsilon) \frac{\partial M}{\partial M_i} ds - \int \frac{\partial}{\partial M_i} \left(\theta \frac{\partial M}{\partial s} \right) ds = 0 \quad \text{--- (13)}$$

式(13)の右辺のオ1項にシンプソンの公式を適用して次式をうる。

$$\frac{\lambda}{6} \{ \phi_i(1+\epsilon_i) + (\phi_i + \phi_{i+1})(1+0.5\epsilon_i + 0.5\epsilon_{i+1}) + (\phi_{i-1} + \phi_i)(1+0.5\epsilon_{i-1} + 0.5\epsilon_i) + \phi_{i-1}(1+\epsilon_{i-1}) \}$$

また、オ2項については $\int \theta \frac{\partial M}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^N \left[\theta_i \frac{M_{i+1} - M_i}{\lambda} \lambda \right]$ で近似しうるので

$$\int \frac{\partial}{\partial M_i} \left(\theta \frac{\partial M}{\partial s} \right) ds = \theta_{i-1} - \theta_i$$

となる。したがって式(13)は次のように書き表わされる。

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \frac{\lambda}{6} \{ \phi_{i-1}(1+0.5\epsilon_{i-1} + 0.5\epsilon_i) + \phi_i(4+0.5\epsilon_{i-1} + 3\epsilon_i + 0.5\epsilon_{i+1}) + \phi_{i+1}(1+0.5\epsilon_i + 0.5\epsilon_{i+1}) \} \quad \text{--- (14)}$$

式(14)を無次元化して次式をうる。

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \frac{\omega \bar{\lambda}}{6} \{ \phi_{i-1}(1+0.5\epsilon_{i-1} + 0.5\epsilon_i) + \phi_i(4+0.5\epsilon_{i-1} + 3\epsilon_i + 0.5\epsilon_{i+1}) + \phi_{i+1}(1+0.5\epsilon_i + 0.5\epsilon_{i+1}) \} \quad \text{--- (15)}$$

ただし $\bar{\lambda} = \lambda / l$, $\phi = \phi / \phi_y$, ϕ_y : 降伏時の曲率 ($= M_y / EI$), ϵ : 図心点のひずみ

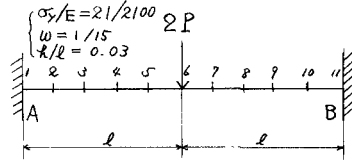
III. 解法

式(12)のたわみ角式ならびに式(15)の θ_i の算定式を併用することにより、従来のたわみ角法に準じて不静定構造物の変形ならびに応力の解析が可能となる。以下、具体的な例を用いて解説する。

1) 両端固定梁

集中荷重 $2P$ が中央点に働く図-3の両端固定梁について計算する。境界条件より、 $\theta_A = 0$, $\theta_B = 0$, $H_A = 0$, $R = 0$ である。ゆえ式(12)は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \bar{M}_{AB} = \bar{C}_{AB} &= (d\bar{C}_1 - \phi\bar{C}_2) / (\phi^2 - ad) \\ \bar{M}_{BA} = \bar{C}_{BA} &= (a\bar{C}_2 - \phi\bar{C}_1) / (\phi^2 - ad) \end{aligned} \quad \text{--- (16)}$$



(図-3)

ここに、式(16)の諸値は構造および載荷条件の対称性から次のような内容となる。

$$a = \int (\kappa_i^2 + g_i^2) ds, \quad \phi = 2 \int \kappa_i g_i ds, \quad \bar{M}_0^i = M_0^i / M_y, \quad d = \int (\kappa_i^2 + g_i^2) ds$$

$$\bar{C}_1 = \int (\kappa_i - g_i) \bar{M}_0^i ds + \int (\kappa_i - g_i) \phi_{p_i} ds, \quad \bar{C}_2 = \int (g_i - \kappa_i) \bar{M}_0^i ds + \int (g_i - \kappa_i) \phi_{p_i} ds$$

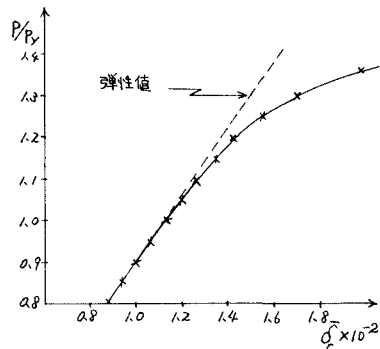
一方、中央点のたわみ δ_c は変分原理により次式で与えられる。

$$\delta_c = \partial C / \partial (2P) = \int \phi_i \lambda f_i ds = \omega \lambda \int \phi_i f_i ds$$

$$\text{すなわち、} \bar{\delta}_c = \delta_c / l = \omega \lambda \int \phi_i f_i ds$$

以上から本例の解法骨子は以下のとおりとなる。すなわち、不静定モーメント $\bar{M}_{AB}$, $\bar{M}_{BA}$ が式(16)より求められ、したがって式(4)より各分割点のモーメントが、さらにこれらに対応する曲率がそれぞれ算定され(文献2)参照)、所要のたわみ δ_c が求められる。

図-4は梁を10等分した場合の荷重-たわみ曲線を求めその結果の一部を示したものである。



(図-4)

2) 門型ラーメン

図-5のごとく横荷重を受ける両脚固定の門型ラーメンについて計算する。構造ならびに載荷条件を考慮すれば各部材のモーメントは式(12)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{AB} &= \frac{1}{\omega} (\beta_B \theta_B + \gamma_{AB} R) + \bar{C}_{AB} \\ \bar{M}_{BA} &= \frac{1}{\omega} (\alpha_{BA} \theta_B + \gamma_{BA} R) + \bar{C}_{BA} \\ \bar{M}_{BC} &= \frac{1}{\omega} (\alpha_{BC} \theta_B + \beta_{BC} \theta_B) + \bar{C}_{BC} \end{aligned} \right\} \text{--- (17)}$$

次に節点方程式および層方程式がそれぞれ次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \text{節点方程式} &\text{--- } \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 0 \\ \text{層方程式} &\text{--- } \bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA} = -\frac{7}{4} P/P_y \end{aligned} \right\} \text{--- (18)}$$

$$\text{ただし, } P_y = \frac{7}{2} M_y / l$$

式(18)に式(17)を代入して θ_B, R について連立に解けば

$$\theta_B = \frac{\omega \{ \gamma_{BA} (\frac{7}{4} P/P_y + \bar{C}_{AB} - \bar{C}_{BC}) - \gamma_{AB} (\bar{C}_{BA} + \bar{C}_{BC}) \}}{\gamma_{AB} (\alpha_{BA} + \alpha_{BC} + \beta_{BC}) + \gamma_{BA} (\alpha_{BC} - \beta_{AB} + \beta_{BC})}$$

$$R = \{ (\alpha_{BA} + \alpha_{BC} + \beta_{BC}) \theta_B + \omega (\bar{C}_{BA} + \bar{C}_{BC}) \} / \gamma_{BA}$$

上式より未知数 θ_B, R が求められ、これらを式(17)に代入すれば不静定モーメント $\bar{M}_{AB}, \bar{M}_{BA}, \bar{M}_{BC}$ が定められる。また、節点Bの水平移動量 δ_B は $\delta_B = l \tan R$ 与えられる。

以上から荷重に対するたわみ δ_B がりの場合と同様にして算定可能となる。各部材を8等分した場合の $P/P_y - \delta_B/l$ 曲線を求めその結果を図-6に示す。

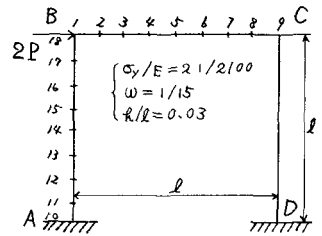
IV. 結語

本研究により、高次不静定構造物の弾塑性有限変形挙動を一般的に解明することが可能となった。すなわち、係数ならびに荷重項は未知数 θ および P_y および E_i (文献2)の方法で確定できる。)を含むため数値積分しなければならないが、予めそのサブプログラムを作製しておけば左側のたわみ角法に準じて高次不静定構造物の弾塑性有限変形挙動を解析でき、たわみ角法の利点をそのまま踏襲しうる他、荷重が任意に変動する場合も適用可能となる。

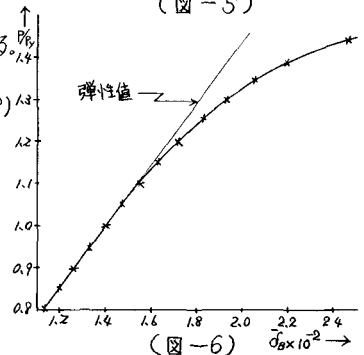
なお、本研究に文部省科学研究費の補助をえた、ここに記して謝意を表する。

V. 参考文献

- 1) 堀井・河原；“有限変形を考慮した平面骨組構造物の弾塑性解析法”，土木学会論文集 N0.169, 1969-9
- 2) 太田；“アルミニウム片持梁の弾塑性有限変形について”土木学会西部支部論文集 1969-2，“残留応力の影響を考慮した鋼材の弾塑性解析”才19回応用力学連合講演会論文抄録集(昭和44年10月)
- 3) 山崎・太田・石川；“補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析”土木学会論文集才134号(昭和41年10月)



(図-5)



(図-6)