I－11　　直線材任意格子および変断面桁の動的解析

熊本大学　正員　吉村虎蔵
同　正員　平井一男
同　正員　田中重範
同　学生員　○吉村健

筆者の一人平井は「結合法による格子構造の解析」と題する小文[1]を発表したが，その後この論文に関連して解析に便利な式および広義の式も得た。また変断面桁などの動的解析についても結合法方式の一法を得たので併せてここに報告する。論文[1]で取扱った格子桁は，図－1(a),(b)の格子桁であるならば，主桁が単純支持でも中間支点をもつ連続桁であっても差つかえないが，定断面桁で質量は等分布，かつ桁のねじれの影響を無視する場合について解析が進められている。その解析過程を行列表示によって抄録すると次の通りである。

Free body の主桁については，$\mathbb{W}^H=\mathbb{F}^H_{(\omega)}\mathbb{P}^H$，　故に $\mathbb{P}^H=(\mathbb{F}^H_{p(\omega)})^{-1}\mathbb{W}^H$　　(1)

ここに，$\mathbb{W}^H$：主桁格点のたわみ行列，$\mathbb{P}^H$：主桁格点の格点力行列，$\mathbb{F}^H_{p(\omega)}$ 主桁の動的柔性行列。

Free body の横桁については，図－1(b)の場合には剛性行列が特異であるために，柔性行列$\mathbb{F}$がつくれないので一般には次の形の式とする。添字Qは横桁を示す。

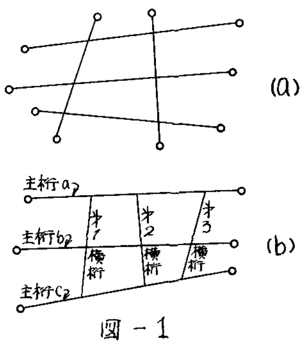
$$\mathbb{P}^Q=\mathbb{K}^Q\mathbb{W}^Q \tag{2}$$

$\mathbb{K}^Q$は横桁の剛性行列である。自由振動のとき，各格点では外力がゼロであるから，$\mathbb{P}^H+\mathbb{P}^Q=\mathbb{O}$，また主桁と横桁の格点でのたわみは等しいから，$\mathbb{W}^H=\mathbb{W}^Q$，　故に，　$[(\mathbb{F}^H_{p(\omega)})^{-1}+\mathbb{K}^Q]\mathbb{W}^H=\mathbb{O}$．

従って振動数方程式は次式となる。

$$\det\left|(\mathbb{F}^H_{p(\omega)})^{-1}+\mathbb{K}^Q\right|=0 \tag{3}$$

これより固有値ωを求め，前式に入れてたわみの比を求め，更にこれを式(1)(2)に入れて，Pの比を求め，$\mathbb{W}^H=\mathbb{F}^H_{(\omega)}\mathbb{P}^H$の式に入れて振動モードを求める。



図－1

〔1〕 横桁の剛性行列の作成について

まず，図－1(a)の形式の場合では，横桁についての剛性行列$\mathbb{K}$をつくると，その逆行列$\mathbb{F}^Q$が得られるので，

$$\mathbb{W}^Q=\mathbb{F}^Q\mathbb{P}^Q \tag{4}$$

の式が直ちに得られる。

しかしながら，図－1(b)の形式の横桁では，剛性行列そのものも直ちには求めかねるものと思われるので，ここではまずこの剛性行列のつくり方についての2つの方法を記す。

〔第1法〕　図－1(b)の横桁では振動時にその質量を考慮すれば，*Free-Free*のはりの振動を取扱うことになるので解析がかなり複雑となり，それだけの効果も少いと思われるので横桁の質量を無視することにする。すなわち横桁は静力学的に扱うこととする。いま主桁が4本の図－2の第i番目の横桁について考慮する。横桁は定断面でも変断面でもよい。

$$w_b^Q = \left(\tfrac{2}{3}w_a + \tfrac{1}{3}w_d\right) + \left(\delta_{bb,0}\, P_b^Q + \delta_{bc,0}\, P_c^Q\right) \qquad (5)$$

$$w_c^Q = \left(\tfrac{1}{3}w_a + \tfrac{2}{3}w_d\right) + \left(\delta_{cb,0}\, P_b^Q + \delta_{cc,0}\, P_c^Q\right) \qquad (6)$$

たゞし，$\delta_{bb,0}$，$\delta_{bc,0}$; $\delta_{cb,0}$，$\delta_{cc,0}$ はそれぞれ単純ばり $\overline{abcd}$ の b 点と c 点のたわみの影響係数である。

また鉛直方向の力のつり合い，$\Sigma V=0$ より，

$$P_a^Q + P_b^Q + P_c^Q + P_d^Q = 0 \qquad (7)$$

さらにモーメントのつり合い，$\sum_d M = 0$ より，

$$3P_a^Q + 2P_b^Q + P_c = 0 \qquad (8)$$

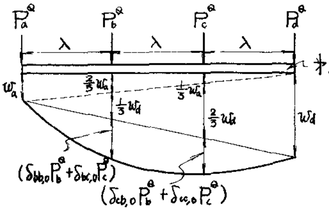


図-2

上の4式は主桁間隔が等しいときの式であるが，不等間隔の場合は式(5)(6)の $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，式(8)の 3，2 等の係数が変ることになる。また主桁数が n 本の場合にも，同様の手法で式(5)(6)に代る式が $(n-2)$ヶ と(7)(8)と同種の式が2ヶ合計 nヶ の式が得られる。上の4式を行列表示すると，

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta_{bb,0} & \delta_{bc,0} & 0 \\ 0 & \delta_{cb,0} & \delta_{cc,0} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} P_a^Q \\ P_b^Q \\ P_c^Q \\ P_d^Q \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} w_a^Q \\ w_b^Q \\ w_c^Q \\ w_d^Q \end{bmatrix}_i$$

上式の行列を左から $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{P}_i^Q$, $\mathbb{B}_i$, $\mathbb{W}_i^Q$ とすると，上式は $\mathbb{A}_i \mathbb{P}_i^Q = \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^Q$ 。$\mathbb{A}$ のうち破線部分の要素は単純ばりのたわみの影響係数である。さて，$\mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{B}_i$ は第 i 横桁についての剛性行列 $\mathbb{K}_i^Q$ となるから，

$\mathbb{P}_i^Q = \mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^Q = \mathbb{K}_i^Q \mathbb{W}_i^Q$ 。横桁が数本あるときには，これらの式をまとめて次のように書くことができる。

$$\mathbb{A}\,\mathbb{P}^Q = \mathbb{B}\,\mathbb{W}^Q \qquad (9)$$

$$\mathbb{P}^Q = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\,\mathbb{W}^Q = \mathbb{K}^Q\mathbb{W}^Q \qquad (10)$$

〔第2法〕 図-3 の荷重が第 i 番目の横桁の格点に働くときには次の関係が成立する。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{M}/\ell \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{ww} & \mathbb{K}_{w\theta} \\ \mathbb{K}_{\theta w} & \mathbb{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \mathbb{W} \\ \theta\ell \end{bmatrix}_i$$

ここに

$$\mathbb{K}_{ww} = \frac{2EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 6 & -6 & & \\ -6 & 12 & -6 & \\ & -6 & 12 & -6 \\ & & -6 & 6 \end{bmatrix}_i, \quad \mathbb{K}_{w\theta} = \frac{2EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & & \\ -3 & 0 & 3 & \\ & -3 & 0 & 3 \\ & & -3 & -3 \end{bmatrix}_i, \quad \mathbb{K}_{\theta w} = \frac{2EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 3 & -3 & & \\ 3 & 0 & -3 & \\ & 3 & 0 & -3 \\ & & 3 & -3 \end{bmatrix}_i, \quad \mathbb{K}_{\theta\theta} = \frac{2EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}_i$$

上式は次の行表示となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}^Q \\ \mathbb{M}^Q/\ell \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{ww} & \mathbb{K}_{w\theta} \\ \mathbb{K}_{\theta w} & \mathbb{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \mathbb{W}^Q \\ \theta^Q\ell \end{bmatrix}_i = \mathbb{K}_i^Q \begin{bmatrix} \mathbb{W}^Q \\ \theta^Q\ell \end{bmatrix}_i$$

上式のうち $\mathbb{M}$ の項は主桁のねじり剛性を考慮するときのための準備の項である。もし主桁のねじり剛性を無視するときは前式をバラして，$\mathbb{P}_i^Q = (\mathbb{K}_{ww}\mathbb{W}_i^Q + \mathbb{K}_{w\theta}\theta_i \ell)$，　$\mathbb{M}_i/\ell = \mathbb{O} = (\mathbb{K}_{\theta w}\mathbb{W}_i^Q + \mathbb{K}_{\theta\theta}\theta_i \ell)$

故に　$\mathbb{P}_i^Q = (\mathbb{K}_{ww} - \mathbb{K}_{w\theta}\mathbb{K}_{\theta\theta}^{-1}\mathbb{K}_{\theta w})\mathbb{W}_i^Q \equiv \mathbb{K}_i^Q \mathbb{W}_i^Q$ 。　全横桁については次式となる。

$$\mathbb{P}^Q = \mathbb{K}^Q\mathbb{W}^Q \qquad (11)$$

〔2〕 主桁の動的柔性行列について．

Free body の主桁 a の各格点に $P_j \sin\omega t$ が働くときの i 点のたわみは次式で示される。

$$w(x_i) = \sum_n \frac{1}{\omega_{0n}^2 - \omega^2}\,\Phi_n(x_i)\,\Phi_n(x_j)\,P_j \sin\omega t \equiv f_{ij}\,P_j \qquad (\sin\omega t = 1 \text{ とおく。}) \quad (12)$$

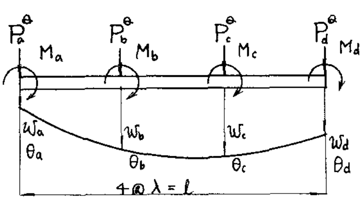


図-3

ここに $\omega_{gn}^2=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4\frac{EI}{\rho}$, $\Phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ 。故に格子全体の主桁について次の式が得られる。

$$\mathbb{W}^H=\mathbb{F}_{(\omega)}^H\,\mathbb{P}^H \tag{13}$$

もしも主桁のねじり剛性を考慮に入れるときは，格点のねじり周期力 $T_j\sin\omega t$ によるねじれ角は，

$$\theta(x_i)=\sum_m\frac{1}{\omega_{gm}^{T\,2}-\omega^2}\,\Phi_m^T(x_i)\,\Phi_m^T(x_j)\,T_j\equiv f_{ij}^T\,T_j \tag{14}$$

ここに $\omega_{gm}^{T\,2}=\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\frac{KGA}{I_0\rho}$, $\Phi_m^T(x)=\sqrt{\frac{2A}{\rho I_0\ell}}\sin\frac{m\pi x}{\ell}$ 。 故に格子の主桁については (13) と同様に，

$$\mathbb{\theta}^H=\mathbb{F}_{(\omega)}^{TH}\,\mathbb{T}^H \tag{15}$$

あるいは $\mathbb{F}_{(\omega)}^{TH}$ と $\mathbb{F}_{(\omega)}^H$ との次元をそろえるために，$\frac{1}{\ell}\Phi_n^T(x)=\overline{\Phi}_n(x)$, $\frac{1}{\ell^2}\mathbb{F}_{(\omega)}^{TH}=\overline{\mathbb{F}}_{(\omega)}^{TH}$ とおいて 式(15) を書きかえると，

$$(\theta^H\ell)=\overline{\mathbb{F}}_{(\omega)}^{TH}\,(\mathbb{T}^H/\ell) \tag{16}$$

(15)(16) を併せるとねじり剛性を考慮した主桁では次式が得られる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{W}^H\\ \theta^H\ell\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{(\omega)}^H & \\ & \overline{F}_{(\omega)}^{TH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{P}^H\\ T^H/\ell\end{bmatrix}\equiv\mathbb{F}_{PT}^H\begin{bmatrix}\mathbb{P}^H\\ \mathbb{T}^H/\ell\end{bmatrix} \tag{17}$$

〔3〕. 振動数方程式

主桁が定断面直線の単純支持あるいは連続桁の任意格子桁における振動数方程式の形は次のようにまとめることができよう。

(i) 図-1(a) の形の格子桁で主桁のねじり剛性を無視するときは，式(4)と式(13)において，
$\mathbb{W}^H=\mathbb{W}^Q$, $\mathbb{P}^H+\mathbb{P}^Q=\mathbb{0}$ を用いると，$(\mathbb{F}^Q+\mathbb{F}_{(\omega)}^H)\mathbb{P}^H=\mathbb{0}$ 。自由振動しているから次の式が成立する。

$$\det\left|\mathbb{F}^Q+\mathbb{F}_{(\omega)}^H\right|=0 \tag{18}$$

これより ω を求め，式(18)の前式に入れて P_a 比を求め，P_a比を式(13)に入れてモードを求めることができる。

(ii) 図-1(b) の形式の格子で主桁のねじり剛性を無視するとき

式(13)と式(9)あるいは(10)または(11)を取出し，たわみを等値して，自由振動時に外力=0の条件を用いると，

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B}\mathbb{F}_{(\omega)}^H)\mathbb{P}^H=\mathbb{0} \tag{19}$$

あるいは
$$(\mathbb{I}+\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{F}_{(\omega)}^H)\mathbb{P}^H=\mathbb{0} \tag{20}$$

または
$$(\mathbb{I}+\mathbb{K}^Q\mathbb{F}_{(\omega)}^H)\mathbb{P}^H=\mathbb{0} \tag{21}$$

ここに $\mathbb{I}$ は単位行列である。したがって振動数方程式は次のいずれを用いてもよい。

$$\det\left|\mathbb{A}+\mathbb{B}\mathbb{F}_{(\omega)}^H\right|=0 \tag{22}$$

$$\det\left|\mathbb{I}+\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{F}_{(\omega)}^H\right|=0 \tag{23}$$

あるいは
$$\det\left|\mathbb{I}+\mathbb{K}^Q\mathbb{F}_{(\omega)}^H\right|=0 \tag{24}$$

ここに $\mathbb{K}^Q$ は $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ より求めてもよいし，直接前記第2法の式を参照して計算してもよい。

(iii) 主桁のねじり剛性を考慮するときの振動数方程式

主桁については式(17)がある。また横桁については第2法の $\{\mathbb{P}^Q, M^Q/\ell\}$ の式を格子桁の横桁全体について書くと次のようになる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{P}\\ M/\ell\end{bmatrix}^Q=\mathbb{K}_{PT}^Q\begin{bmatrix}\mathbb{W}\\ \theta\ell\end{bmatrix}^Q \tag{25}$$

$\mathbb{\theta}^H=\mathbb{\theta}^Q$, $\mathbb{W}^H=\mathbb{W}^Q$, $\mathbb{P}^H+\mathbb{P}^Q=\mathbb{0}$, $M^Q+\mathbb{T}^H=\mathbb{0}$ を用いると，

$$(\mathbb{I}+\mathbb{K}_{PT}^Q\,\mathbb{F}_{PT}^H(\omega))\{\mathbb{P},\,M/\ell\}^H=\mathbb{0} \tag{26}$$

故に振動数方程式は,

$$\det \left| \mathbb{I} + \mathbb{K}^{Q}_{PT} \mathbb{F}^{H}_{PT}(\omega) \right| = 0 \qquad (27)$$

[4] 変断面桁の固有値について.

従来，筆者らが提案する動的結合法では桁は定断面として取扱って来た。ここでは変断面桁の動的解析について記す。まず変断面桁のうち，質量分布が等分布で断面2次モーメントのみが変化する桁の固有値問題を取上げる。鋼道路橋などでは鋼桁の断面2次モーメントは部分的に変化しても，床組および床版重量は鋼主桁自身の重量に比べて大きく，主桁が変断面であるための重量分布の変化は僅少であるから，このような場合を対象とする。

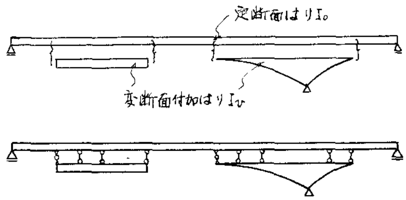


図-4

まず定断面主桁 I_0 ばりについて式(13)の関係，$\mathbb{W}^H=\mathbb{F}^H_{(\omega)}\mathbb{P}^H$ を導く。変断面の部分は図-4(a)のように I の増加部分の I_v のみを上の定断面ばりの I_0 に結合することを考える。問題のはりの断面2次モーメントは $I=I_0+I_v$．このとき結合分の I_v は定断面でも変断面でもよい。何故ならば上の仮定によって結合部分の I_v には質量を考えないから，結合ばりについては静力学的問題となるからである。結合ばりの I_v と定断面桁の I_0 との結合は，両者のたわみを等値するのがよい。もっと精密にはたわみ角を等値することである。解析法の説明としては図-4(b)のモデルで充分であろう。付加 I_v のはりについて，結合点で働く力と変位との関係は，すでに第1法において導いた。これと式(13)とを併せ考えて，たわみ角の等値と，結合点における外力=0の条件を入れる。その結果から振動数方程式は式(22),(23),(24)などと同形の式となることが知られる。式中の $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{K}^Q$ などが結合ばり I_v についての行列である。

[5]. 質量付加の場合のはりの固有値

[4]では質量等分布の場合の変断面はりの固有値について述べた。ここでは固有値の知られたはり（定断面あるいは変断面）の一部に付加質量のあるときの固有値の解析について記す。これは[4]と併せると変断面で重量分布が甚しく変化するはりの固有値解析に応用できるものと思われる。

図-5(a)のようにはり上に集中質量 m_i があるときのはりの固有値問題をまず扱うことにする。もとのはりに $P_i \sin\omega t$ が働いているときの (x_i) 点のたわみは式(12)の形で与えられる。図-5(a)の場合では，$P_i=-m_i\omega^2 w(x_i)$ とおいてよいから次式が得られる。これが振動数方程式である。

$$1+m_i\sum_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2-\omega^2}\Phi_n^2(x_i)=0$$

モードは式(12)によって得られる。

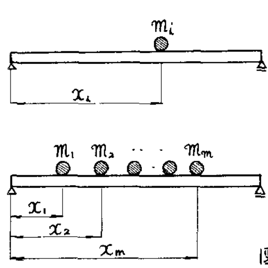


図-5

図-5(b)のように付加質量が m_r ある場合には，$\mathbb{W}=\mathbb{F}(\omega)\mathbb{P}$，$\mathbb{P}=-\mathbb{M}\omega^2\mathbb{W}$，ただし $\mathbb{M}$ は質量 $m_1 m_2 \cdots m_m$ についての対角行列。故に，$(\mathbb{I}+\omega^2\mathbb{F}(\omega)\mathbb{M})\mathbb{W}=0$。

振動数方程式は

$$\det\left|\mathbb{I}+\omega^2\mathbb{F}(\omega)\mathbb{W}\right|=0$$

(注) (1) 平井，結合法による格子構造の動的解析，土木学会論文集101号，S39.1