

熊本大学 正員 平井一男

まえがき

この研究は新しい外力としてせん断荷重（これは従来内力として使用されてきたせん断力—普通 $Q$ の記号で示される—とは全く異なっている）を提案し、このせん断荷重の定義をした後、この新しい外力を使用して構造物の動的・静的解析が可能であることを示すのである。従来通常の外力として使用されてきた外力は、力とモーメント荷重の2種のものであるが、筆者はモーメント荷重を一つに組合せてできた新しい外力を曲げ荷重と呼び、これを使用して弾性ヒンジを持つ構造物の解析が有利にできることを示した。ここに示すせん断荷重による解析法はこの曲げ荷重をさらにもう一度組合せてせん断荷重と称する新しい外力を作り、これの使用によって構造物の動的・静的反力の影響線または端支点の上下運動にともなう構造物の動的静的レスポンスを求めようとするのである。この解析法によると集中荷重の作用によって求まるレスポンスが求められると、その撓み曲線の微分、またはその内部のせん断力により反力の影響線が求められ、さらには支点の運動によるその構造物のレスポンスが動的に静的に求められることになる。ここではまず、上述の曲げ荷重、せん断荷重と称する外力の概念とその基礎式とをモーダルアナリシスによる固有値とモードの関係より説明し、その基礎式を静的解析について適用し、この解析過程が正しいことを示した後、動的な場合について若干ふれてみることにする。

## 理論

Modal Analysis によれば集中荷重  $P(x)$  が作用するときのレスポンス  $W$  は、その系の固有値  $\omega_n$  と振動モード  $\Phi_n(x)$  とが与えられれば次式より求められる（図-1）。

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 \cdot W_n = \Phi_n(x_i) \cdot \Phi_n(x_j) \cdot P(x) \quad \dots (1)$$

$$W = \sum W_n \quad \dots (2)$$

ここに

 $\omega_n$  :  $n$  次の固有振動数 $\Phi_n(x)$  :  $n$  次の振動モード $x_i$  : 測定点の座標

モーメント荷重  $M(x)$  は2つの集中荷重の和としてあらわされるので（図-2参照）、式(1)の右边は

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \Phi_n(x) \{ \Phi_n(x_j + \Delta x_j) - \Phi_n(x_j) \} P(x) \\ &= \Phi_n(x) \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Phi_n(x_j + \Delta x_j) - \Phi_n(x_j)}{\Delta x_j} \right\} P(x) \Delta x_j \\ R.H.S. &= \Phi_n(x) \cdot \Phi_n'(x_j) \cdot M(x) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

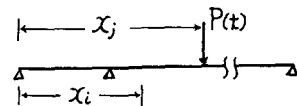


図-1

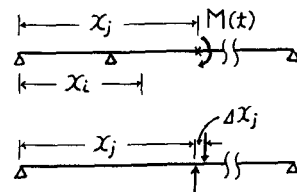


図-2

と与えられるので式(1)は式(4)となる。

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 \bar{w}_n = \bar{\Phi}_n(x_i) \cdot \bar{\Phi}'_n(x_j) \cdot M(t) \quad \dots (4)$$

ここに、 $M(t) = P(t) \cdot \Delta x_j$

ここでモーメント荷重をもう一度図-3のように  
 $\Delta x_j$  はなれた場所に pair にして作用させた場合を  
 考えろと式(4)の右辺は、

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= \bar{\Phi}_n(x_i) \{ \bar{\Phi}'_n(x_j) - \bar{\Phi}'_n(x_j + \Delta x_j) \} \cdot M(t) \\ &= \bar{\Phi}_n(x_i) \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \left\{ \frac{\bar{\Phi}'_n(x_j) - \bar{\Phi}'_n(x_j + \Delta x_j)}{\Delta x_j} \right\} M(t) \cdot \Delta x_j \\ &= -\bar{\Phi}_n(x_i) \bar{\Phi}''_n(x_j) M(t) \cdot \Delta x_j \\ &= -\bar{\Phi}_n(x_i) \bar{\Phi}''_n(x_j) \mathcal{M}(t) \end{aligned}$$

ここに  $\mathcal{M}(t) = M(t) \cdot \Delta x_j$

この場合、式(4)は次式にて与えられる。

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 \bar{w}_n = -\bar{\Phi}_n(x_i) \bar{\Phi}''_n(x_j) \mathcal{M}(t) \quad \dots (5)$$

上式の  $\mathcal{M}(t)$  が曲げ荷重と定義したのであ  
 って、この荷重を使用すれば、任意の点に  
 弾性ヒンジまたは、ヒンジを持つ梁の解析  
 可能であった。これを図-3に示すように  
 〽の記号であらわすことにする。

さて、次にこの曲げ荷重をもう一度対に  
 して図-4(a)に示すようにして作用させる。  
 このとき式(5)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{w}_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 \bar{w}_n &= -\bar{\Phi}_n(x_i) \{ \bar{\Phi}''_n(x_j + \Delta x_j) - \bar{\Phi}''_n(x_j) \} \mathcal{M}(t) \\ &= -\bar{\Phi}_n(x_i) \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \left\{ \frac{\bar{\Phi}''_n(x_j + \Delta x_j) - \bar{\Phi}''_n(x_j)}{\Delta x_j} \right\} \mathcal{M}(t) \Delta x_j \\ \frac{\partial^2 \bar{w}_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 \bar{w}_n &= -\bar{\Phi}_n(x_i) \bar{\Phi}'''_n(x_j) S(t) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 $S(t) = \mathcal{M}(t) \cdot \Delta x_j \quad \dots (7)$

この  $S(t)$  で定義される荷重が上述のせん  
 断荷重であり、その載荷点附近の変形は図  
 -5に示すような変形をするので、図-4  
 (c)に示す撓み曲線を与えることがわかる。  
 この  $S(t)$  を、図-4(b)の記号で示す。

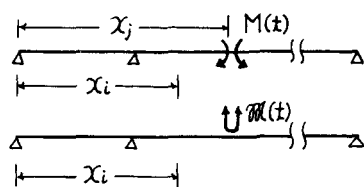


図-3

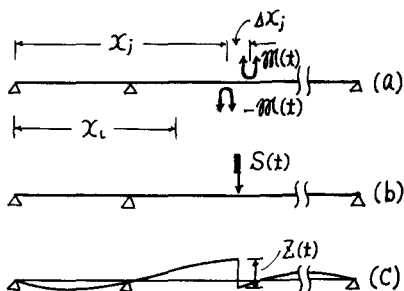
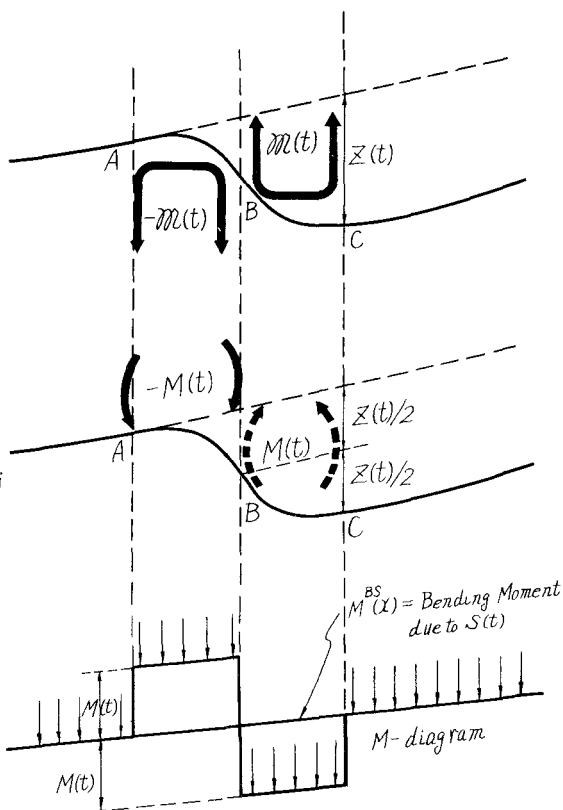


図-4

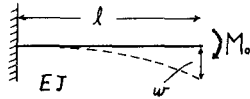


荷重点附近の曲げモーメントで  $M^{BS}(x)$  はその構造物が不静定である場合、変形によって生じる曲げモーメントであり、せん断荷重は真中の図に示したように  $\Delta X_j$  はなれた部分に作用する 2 つの曲げ荷重に分解できるので、 $M(x)$  はこの曲げ荷重がその部材に与える曲げモーメントである。いまこの  $M(x)$  のみによる変形を求めてみよう。

一端固定他端自由の梁に  $M_0$  なる端モーメントが作用する時そのたわみは周知の

$$w = \frac{M_0 l^2}{2EJ}$$

したがって、図-5 のように  $M_0$  なる曲げモーメントが  $\Delta X_j$  はなれて作用する場合、その荷重点の面側におけるたわみの差  $Z(x)$  は



$$Z(x) = 2 \times \frac{M(x) \cdot (\Delta X_j)^2}{2EJ} = \frac{M(x) \Delta X_j}{EJ} = \frac{S(x)}{EJ} \quad \text{--- (8)} \quad \text{図-5}$$

で求められる。式(8)は  $S(x)$  なるせん断荷重が作用する時の運動方程式であるが、もし梁に式(8)に示す  $Z(x)$  なるくいちがいを強制的に与えたときには  $Z(x)$  を強制変位の式として式(9)がえられる。

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \omega_n^2 w_n = -EJ \Phi_n(x_i) \Phi_n''(x_j) Z(x) \quad \text{--- (9)}$$

梁の性質として  $-EJ \Phi_n''(x_j)$  はせん断力を表わすので、 $\Phi_n(x_i)$  のモードのせん断力分布を  $Q_n(x_j)$  とあらわすと、次式となる。

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \omega_n^2 w_n = \Phi_n(x_i) Q_n(x_j) Z(x) \quad \text{--- (10)}$$

$$Z(x) \text{ が周期力} \quad Z(x) = Z_0 \sin \omega t \quad \text{--- (11)}$$

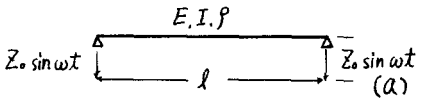
の時には式(10)は直ちにとけてその系のレスポンス  $w$  は次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} w &= \sum w_n = \sum \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \Phi_n(x_i) Q_n(x_j) Z_0 \quad \text{at } \sin \omega t = 1. \\ &= \sum \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \Phi_n(x_i) Q_n(x_j) Z_0 + \sum \frac{\omega^2}{\omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2)} \cdot \Phi_n(x_i) Q_n(x_j) Z_0. \end{aligned} \quad \text{--- (12)}$$

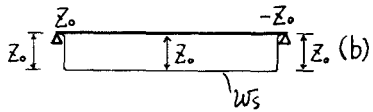
上式中の第1項は  $\omega \rightarrow 0$  のレスポンスを与える静的レスポンス  $w_s$  であり、第2項は慣性力による動的増加たわみ  $\Delta w_d$  を示す。これを書きかえろと、

$$w = \sum w_n = w_s + \Delta w_d \quad \text{--- (13)}$$

例1. 図に示す単純梁の支持点に  $Z_0 \sin \omega t$  なる強制変位を与えたときのレスポンスを求める。



単純梁の固有振動数  $\omega_{jn}$  と振動モード  $\Phi_{jn}(x_i)$  は次式で与えられる。



$$\omega_{jn}^2 = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{\rho}, \quad \Phi_{jn}(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\rho l}} \cdot \sin \frac{n\pi x_i}{l}$$

これを式(9), (13)に使用すると、

図-6

$$w_s = -EI \sum \frac{1}{\omega_{jn}^2} \cdot \Phi_n(x_i) \left[ \Phi_{jn}'''(x_j=0) Z_0 + \Phi_{jn}'''(x_j=l) (-Z_0) \right]$$

$$W_s = \frac{4Z_0}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x_i}{l} = Z_0 \quad \text{for } x_i = 0 \sim l \quad \dots (14)$$

$$(n=1, 3, 5, \dots)$$

これは図-6(b)の矩形波のフーリエ展開式である。また、 $\Delta W_d$ は

$$\begin{aligned} \Delta W_d &= -EI \sum \Delta \Omega_n \cdot \Xi_{jn}''(x_i) \{ \Xi_{jn}'''(x_j=0) \cdot Z_0 + \Xi_{jn}'''(x_j=l) \cdot (-Z_0) \} \\ &= \frac{4\pi^3 EI}{l^4} \sum \Delta \Omega_n n^3 \cdot \sin \frac{n\pi x_i}{l} \cdot Z_0 \end{aligned} \quad \dots (15)$$

ここに

$$\Delta \Omega_n = \frac{\omega^2}{\omega_{jn}^2 (\omega_{jn}^2 - \omega^2)}$$

式(1)と式(10)との比較より、集中荷重  $P(t)$  の作用する時のレスポンスを求める基礎式において、

$$P(t) \rightarrow Z(t)$$

$$\Xi_n(x_j) \rightarrow Q_n(x_j) = -EI \Xi_n'''(x_j)$$

の変換を行えば強制変位の式が導かれることがわかる。

例2. 図-7(a)の一端固定一端単純支持梁

の一端が  $Z_0$  だけたわむ時の変形を求める。

この系に  $P_0$  なる集中荷重が作用する時

のたわみ曲線は

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{P_0}{12EI} \left\{ \frac{3(l-x_j)^2 x_i x_i}{l} - \frac{(l-x_i)^2 (2l+x_i) x_i^3}{l^3} \right\} \\ &\quad + \frac{P_0 (x_i - x_j)^3}{6EI} \quad (\text{for } x_j < x_i < l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{P_0 (l-x_j)^2}{12EI} \left\{ \frac{3x_j x_i}{l} - \frac{(2l+x_i) x_i^3}{l^3} \right\} \\ &\quad (\text{for } 0 < x_i < x_j) \end{aligned}$$

上述のように  $P(t) \rightarrow Z(t)$  とし、 $P$  による撓み曲線を3回、荷重点の座標で微分すれば、

$$\begin{aligned} W_s^2 &= \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_i}{l} \right)^3 - 3 \cdot \left( \frac{x_i}{l} \right) + 1 \right] Z_0 \\ &\quad (\text{for } x_j < x_i < l) \end{aligned}$$

$$W_s^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{x_i}{l} \right)^3 - 3 \cdot \left( \frac{x_i}{l} \right) \right\} Z_0$$

$$(\text{for } 0 < x_i < x_j)$$

となり、図-7(c)のたわみ曲線が求められる。

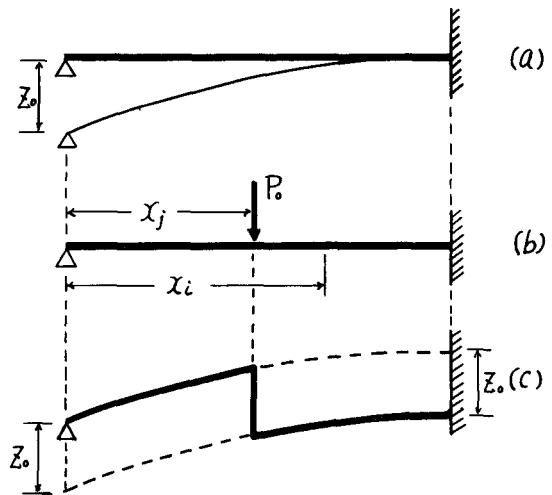


図-7