

1 まえおき

等分布荷重を受ける場合の弾性固定された円弧アーチ応力の計算は弾性理論に基づいて処理できる典型的な問題であり、アーチ応力に関する弾性解析として種々の研究がなされている。ここではAiryの応力関数からアーチ内部応力と誘導する手法ととり、境界条件としてアーチアバット部における変形を基礎とアーチ端部において等しくし、アーチクラウンでの内部応力分布、その他若干のアーチ応力の性状と考察した。

2 理論

Airyの応力関数は次式で与えられるものとして、アーチ外、内弧面およびアバット部における境界条件を満足するように未知数を決定する。

$$F = F' + F'' \quad (1)$$

$$F' = a_0 \log r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \log r \quad (2)$$

$$F'' = (b_1 r^3 + a_1 r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta \quad (3)$$

F', F'' による応力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r', \sigma_\theta', \tau_{r\theta}'$ は次のようになる。

$$\sigma_r' = \frac{1}{r} \frac{\partial F'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F'}{\partial \theta^2} = \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(1 + 2 \log r)$$

$$\sigma_\theta' = \frac{\partial^2 F'}{\partial r^2} = -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(3 + 2 \log r)$$

$$\tau_{r\theta}' = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F'}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F'}{\partial \theta} = 0$$

$$\sigma_r'' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F''}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F''}{\partial r} = (2b_1 r - 2a_1 r^{-3} + b_1' r^{-1}) \cos \theta$$

$$\sigma_\theta'' = \frac{\partial^2 F''}{\partial r^2} = (6b_1 r + 2a_1 r^{-3} + b_1' r^{-1}) \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta}'' = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F''}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F''}{\partial \theta} = (2b_1 r - 2a_1 r^{-3} + b_1' r^{-1}) \sin \theta$$

アーチの外弧側において表面に垂直に一定圧Pが作用し、内弧側では外力が作用しないという境界条件を満足するためには

$$r = r_2 \quad \frac{a_0}{r_2^2} + 2b_0 + c_0(1 + 2 \log r_2) = -P \quad (4)$$

$$2b_1 r_2 - 2a_1 r_2^{-3} + b_1' r_2^{-1} = 0 \quad (5)$$

$$r = r_1 \quad \frac{a_0}{r_1^2} + 2b_0 + c_0(1 + 2 \log r_1) = 0 \quad (6)$$

$$2b_1 r_1 - 2a_1 r_1^{-3} + b_1' r_1^{-1} = 0 \quad (7)$$

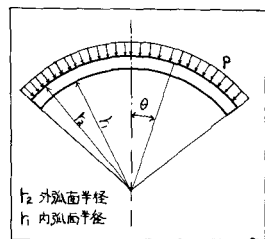


図 - 1

解を求めるためにはアーチの端部における境界条件としてアーチの変形を考慮しなければならない。
ひずみと変位の関係式、ひずみと応力の関係式は次式のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ r_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} \quad (8) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ r_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

u : 半径方向変位

ν : ポアソン比

v : 接線方向変位

G : せん断弾性係数

(8),(9) 式よりアーチの端部での変位を計算すれば次のようになる。

$$u_A = \frac{1}{E} \left\{ -(1+\nu) \frac{Q_0}{r} + 2(1-\nu) C_0 r \log r - C_0 (1+\nu) r + 2b_0 (1-\nu) r + \cos \theta \{ b_1 r^2 (1-3\nu) + \frac{Q_1'}{r^2} (1+\nu) + b_1' (1-\nu) \log r \} + K \cos \theta \right\} + \frac{2b_1'}{E} \theta \sin \theta \quad (10)$$

$$v_A = \frac{1}{E} \left\{ 4C_0 r \theta + \sin \theta \{ b_1 r^2 (5+\nu) + \frac{Q_1'}{r^2} (1+\nu) - b_1' (1-\nu) \log r \} - K \sin \theta \right\} + \frac{2b_1'}{E} \theta \cos \theta - \frac{b_1' (1+\nu)}{E} \sin \theta \quad (11)$$

K : 積分定数

アーチの基礎での回転角の変位, 半径方向変位, 接線方向変位をそれぞれ $\Delta \theta_{cA}$, Δr_{cA} , Δs_{cA} とすれば次のようになる。

$$\Delta \theta_{cA} = \frac{1}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial v_A}{\partial r} dr = \frac{1}{r_1} [v]_{r_1}^{r_2} \quad (12)$$

$$\Delta r_{cA} = \frac{1}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} u_A dr \quad (13)$$

$$\Delta s_{cA} = \frac{1}{r_1} \int_{r_1}^{r_2} v_A dr \quad (14)$$

基礎での岩盤の変位を求めるためにはアーチ端部での断面力を求めなければならない。基礎での曲げモーメント, せん断力, スラストをそれぞれ M_A , V_A , H_A とすれば次のようにして求められる。

$$H_A = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta A} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr = \left[\frac{\partial F}{\partial r} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (15)$$

$$V_A = \int_{r_1}^{r_2} \tau_{r\theta A} dr = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) dr = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (16)$$

$$M_A = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta A} (r - r_m) dr = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta A} r dr - r_m \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta A} dr = \left[\frac{\partial F}{\partial r} \right]_{r_1}^{r_2} [F]_{r_1}^{r_2} - r_m \left[\frac{\partial F}{\partial r} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (17)$$

$$(r_m = \frac{r_1 + r_2}{2})$$

こゝで図-2に示す断面力の向きの変位とそれぞれ $\Delta\theta_A$, Δr_A , $\Delta\delta_A$ とすれば基礎岩盤の変位は次のようになる。

$$\Delta\theta_A = M_A \frac{k_a}{E_r T} + V_A \frac{k_{a2}}{E_r T} \quad (18)$$

$$\Delta r_A = M_A \frac{k_{a2}}{E_r T} + V_A \frac{k_r}{E_r} \quad (19)$$

$$\Delta\delta_A = H_A \frac{k_\theta}{E_r} \quad (20)$$

k_a , k_θ , k_{a2} , k_r はいずれも岩盤常数

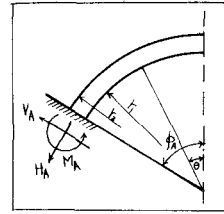


図-2

境界条件としてアーチの端部での変位と基礎岩盤の変位と等しく置くことにより、次の3つの境界条件式が求まる。

$$\Delta\theta_A = -\Delta\theta_C \quad (21)$$

$$\Delta r_A = -\Delta r_C \quad (22)$$

$$\Delta\delta_A = -\Delta\delta_C \quad (23)$$

よってアーチの外弧側、内弧側での境界条件式(4), (5), (6), (7)と基礎での境界条件式(21), (22), (23)より7つの条件式が求まる。また未知数は $A_0, b_0, C_0, A_1, b_1, k$ の7個であるから7元の連立一次方程式を解くことにより、未知数 $A_0, b_0, C_0, A_1, b_1, k$ が求められる。

また構造物の力学的特性と知るためには無次元解析が便利であるので、アーチの応力式をアーチ厚 T と半径 r との比 T/r , コンクリートと基礎岩盤の弾性係数の比 E_c/E_r を用いてアーチの半径方向応力、接線方向応力、せん断応力と無次元量 σ_r/p , σ_θ/p , $\tau_{r\theta}/p$ で誘導した。

すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{p} = & \left\{ A_0' \left(\frac{T}{r_m} \right)^2 \left(\frac{r_m}{r} \right)^2 + 2b_0'' + C_0 \left\{ 1 + 2 \log \left(\frac{r}{r_m} \right) \right\} + \left\{ 2b_1'' \frac{r}{r_m} - 2A_1' \left(\frac{r_m}{r} \right)^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + b_1' \left(\frac{T}{r_m} \right) \left(\frac{r_m}{r} \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\theta}{p} = & \left\{ -A_0' \left(\frac{T}{r_m} \right)^2 \left(\frac{r_m}{r} \right)^2 + 2b_0'' + C_0 \left\{ 3 + 2 \log \left(\frac{r}{r_m} \right) \right\} + \left\{ 6b_1'' \frac{r}{r_m} + 2A_1' \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{r_m}{r} \right)^3 + b_1' \left(\frac{T}{r_m} \right) \left(\frac{r_m}{r} \right) \right\} \cos \theta \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{p} = \left\{ 2b_1'' \left(\frac{r}{r_m} \right) - 2A_1' \left(\frac{r_m}{r} \right)^3 + b_1' \left(\frac{T}{r_m} \right) \left(\frac{r_m}{r} \right) \right\} \cos \theta \quad (26)$$

A_0' , b_0'' , C_0 , b_1'' , b_1' , A_1' は各々連立方程式を解いて得られた無次元量の値である。

これらの各応力の無次元量と T/r , E_c/E_r , のアーチの中心角 θ の種々の変化に対するアーチ応力の挙動を計算した。

3 考察

図-3, 図-4 にアーチクラウンでの接線方向応力分布を示した。一般にアーチの場合の内部応力分布は曲線分布を示すといわれているが、この図からみれば、アーチ厚の薄い場合は直線状態に近く、アーチ厚の厚い場合は曲線分布を示すことが知られる。また角度の変化については中心角が小さくなると直線状態に近くなる傾向を示している。基礎での応力分布についても同様の傾向を示した。図-5 には基礎におけるせん断応力の分布図を示した。図より中心角が大きくなるとせん断応力が小さくなることが知られる。

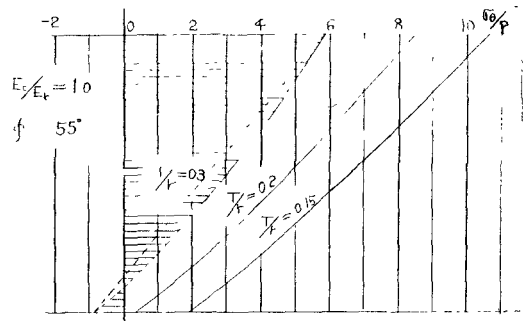


図-3 アーチクラウン接線方向応力分布

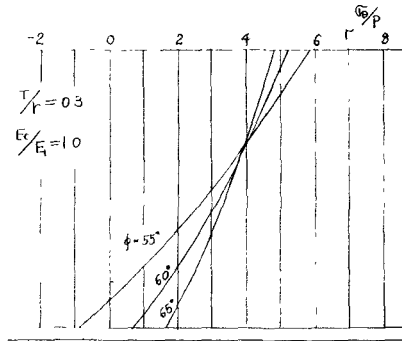


図-4 アーチクラウン接線方向応力分布

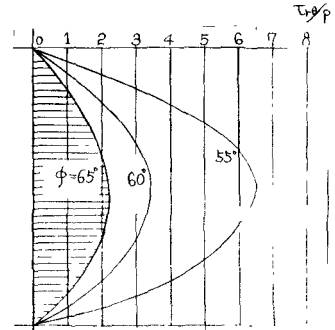


図-5 アーチバットせん断応力分布

4 結論

アーチ応力の弾性解について検討を行ったが γ_r の変化、 E_σ/E_r の変化、中心角の変化に対するアーチ応力の挙動については beam 理論による解析と一致した。この解析はアーチの内部応力状態を調べるために解析を行ったのであるが、中心角の小さい場合の計算結果については良い結果が出ていないので検討中である。

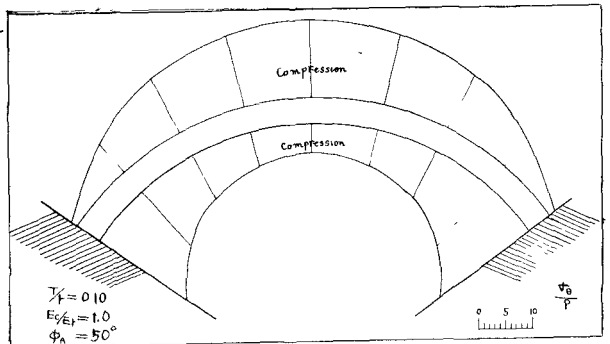


図-6 アーチの外、内弧側接線方向応力分布

参考文献

- 1) Timoshenko 「theory of elasticity」
- 2) 垣谷正道著 「アーチダムの設計に関する研究」
- 3) 村 幸雄, 中村慶一, 大久保忠良, 飯田隆一 「アーチダムの温度応力に関する理論的考察」 (土木研究所報告104号の2, S34・2)