

九州大学 正 員 山崎徳也

〃 〃 〇横田 漢

1. 緒 言

上載荷重による地盤の振動は土木構造物の動的解析において重要な問題であり、荷重が地盤に直接作用する場合についての解析は Reissner¹⁾, Bycroft²⁾ および 奥海³⁾ などによって数多く行われているが、道路舗装などのように地盤上に板がある場合の研究は著者らの知る限り未に見当たらない。

本研究は地盤を半無限弾性体と見え、板に円型等分布重直荷重が周期的に作用する場合の解析を行い、算例として荷重中心点における板のモーメントを算出したものである。

2. 解 法

i) 基礎方程式 図-1 に示すごとく、板の中立面を $z=0$ とする円筒座標 (r, θ, z) を導入し、地盤のそれぞれの方向の変位を (u, v, w) とする。しかもとて、軸対称性を考慮すれば板の振動は次式で表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) w_r + \frac{\rho_1 H}{D} \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = \frac{1}{D} \{g(r) - Q(r)\} e^{ipt} \quad (1)$$

式(1)に $w_r = W_1(r) e^{ipt}$ を代入すれば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) W_1(r) - \lambda^* W_1(r) = \frac{1}{D} \{g(r) - Q(r)\} \quad (2)$$

ここで

W_1 : 板のたわみ, ρ_1 : 板の密度, H : 板厚, D : 板剛度

$$g(r) = \begin{cases} g_0 & (0 \leq r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}, \quad Q(r): \text{地盤反力}, \quad \lambda^* = \frac{\rho_1 H}{D} p^2$$

他方、地盤の応力、変位も対称性を考慮して

$$\sigma_z = G \left(A \frac{2k^2 + j^2}{k^2} e^{-\alpha \bar{z}} + 2C \frac{\beta k^2}{j^2} e^{-\beta \bar{z}} \right) H_0^{(2)}(kr) e^{ipt}, \quad \tau_{z\theta} = 0$$

$$\tau_{rz} = G \left(A \frac{2\alpha}{k^2} e^{-\alpha \bar{z}} - C \frac{k^2 + \beta^2}{j^2} e^{-\beta \bar{z}} \right) \frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial r} e^{ipt} \quad (3-1, 2, 3)$$

$$u = \left(-A \frac{1}{k^2} e^{-\alpha \bar{z}} + C \frac{\beta}{j^2} e^{-\beta \bar{z}} \right) \frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial r} e^{ipt}, \quad v = 0$$

$$w = \left(A \frac{\alpha}{k^2} e^{-\alpha \bar{z}} - C \frac{\beta^2}{j^2} e^{-\beta \bar{z}} \right) H_0^{(2)}(kr) e^{ipt} \quad (4-1, 2, 3)$$

ここで

$$\bar{z} = z - H/2, \quad \alpha^2 = k^2 - h^2, \quad \beta^2 = k^2 - j^2, \quad h = p\sqrt{S/(\lambda + 2G)}, \quad j = p\sqrt{S/G}$$

α, β は正の実数か正の虚数, A, C は積分定数

ii) 境界条件 板と地盤との接触面 $z = H/2$ において次の3つ境界条件を考える。すなわち

$$(\sigma_z)_{z=H/2} = -Q(r) e^{ipt}, \quad (\tau_{rz})_{z=H/2} = 0, \quad (w)_{z=H/2} = w_r = W_1(r) e^{ipt} \quad (5-1, 2, 3)$$

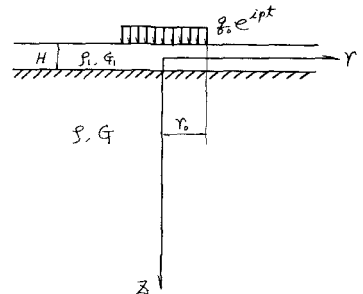


図-1

式(5-2), (3-3)より直ちに

$$C = \frac{2\alpha f}{k^2(k^2 + \beta^2)} A$$

上式を式(3-1), (4-3)に代入のうえ, 式(5-1), (5-3)を参照すれば

$$-Q(r) = \alpha A J_0(kr), \quad W(r) = \alpha C A J_0(kr) \quad (6)$$

$$\text{ただし } \alpha C = \frac{\alpha(-k^2 + \beta^2)}{k^2(k^2 + \beta^2)}, \quad \alpha = \frac{(k^2 + \beta^2)(-2k^2 + f^2) + 4\alpha\beta k^2}{k^2(k^2 + \beta^2)} G$$

よって, 荷重 $q(r)$ を Fourier-Bessel 積分で表示すれば

$$q(r) = \frac{P}{\pi} \frac{J_1(kr_0)}{kr_0} \int_0^\infty J_0(kr) k dk, \quad P = \pi r_0^2 q_0 \quad (7)$$

式(6), (7)を式(2)に代入すれば結局, 積分定数 A の値が求まる。

$$A = \frac{P}{\pi D} \frac{k J_1(kr_0)}{kr_0 \{ \alpha C (k^2 - \lambda^4) - \alpha/D \}} \quad (8)$$

同板のモーメント　　えらび積分定数 A, C を用いて板のモーメント式を誘導し, 結果のみを記せば次式のとおりである。

$$M_R = \frac{P \varepsilon}{\pi R_0} \int_0^\infty \frac{J_1(a_0 y) y \nu}{\Pi(y)} \left[\varepsilon y J_0(R y \varepsilon) + \frac{\mu_1 - 1}{R} J_1(R y \varepsilon) \right] dy e^{y R t}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \Pi(y) &= \varepsilon^3 y y^4 - 6(1-\mu_1) \frac{f}{R} \varepsilon y - 6(1-\mu_1) g R(y) \\ R(y) &= (2y^2 - 1)^2 - 4y^2 \nu \nu', \quad \nu^2 = y^2 - \delta^2, \quad \nu'^2 = y^2 - 1, \quad y = k/f \\ \varepsilon &= a_0/R_0, \quad a_0 = r_0 f = r_0 \sqrt{g/G}, \quad R_0 = r_0/H, \quad g = G/G_1, \quad l = f/p, \\ R &= r/H, \quad \delta = k/f = \sqrt{(1-2\mu)/2(1-\mu)}, \quad \mu_1, \mu, \text{板, 地盤のポアソン比} \end{aligned}$$

よると, 荷重の中心点 ($R=0$) における板のモーメントは次式で与えられる。

$$(M_R)_{R=0} = P \frac{1+\mu_1}{2\pi} \frac{a_0^2}{R_0^2} \int_0^\infty \frac{y^2 \nu J_1(a_0 y)}{\Pi(y)} dy e^{y R t} \quad (9)$$

3. 計算例

算例として, $\mu_1 = \mu = 1/4$ ($\delta^2 = 1/3$), $l = 0.694$, $g = 0.125$
 $R = 20$ の場合における式(9)のモーメントの値を求めれば以下のとおりである。

被積分函数の分母 $\Pi(y)$ は例へば上記諸性状の場合, 表-1に示すように実根 R_0 を有しており, したがって簡単に数値積分は行えない。ここには以下のごとく複素積分⁴⁾を用いて解析することにする。

式(9)に

$$J_1(a_0 y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{i a_0 y \cosh u} + e^{-i a_0 y \cosh u}) \cosh u du$$

表-1

a_0	y_R	a_0	y_R
0.0	1.087666	0.8	1.171175
0.1	1.101470	0.9	1.167155
0.2	1.116130	1.0	1.159354
0.3	1.130965	1.1	1.148570
0.4	1.145007	1.2	1.135641
0.5	1.157078	1.3	1.121337
0.6	1.165995	1.4	1.106291
0.7	1.170833	1.5	1.091018

を代入のうえ整理すれば

$$(M_R)_{R=0} = -P e^{\frac{1}{2} \frac{5 a_0^2}{64 \pi}} \bar{M}_R \quad (10)$$

$$\text{ここに} \quad \bar{M}_R = \int_0^\infty G(u) \cosh u \, du \quad (11) \quad G(u) = \int_{-\infty}^\infty \frac{y \varphi^2}{W(\varphi)} e^{-i a_0 y \cosh u} d\varphi \quad (12)$$

複素平面 $\eta = y + i$ で導入し、まず式(12)の積分を次のように考えに行う。すなわち、同式の被積分函数は φ , φ' の存在により分枝点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ を有しており、Cauchyの定理を用いる以前に同函数をまず二函数に直さなければならぬ。これは、 ϕ とまず同分枝点と複素数値 k_a , k_β に置き換えらうとて、図-2に示すごとく cut を導入するとよい。で達成される。この状態で同図の積分路にそって Cauchy の定理を適用して積分値を算出し、しかるのち k_a , k_β を実軸上に戻す極限值として式(12)の積分値を求める。

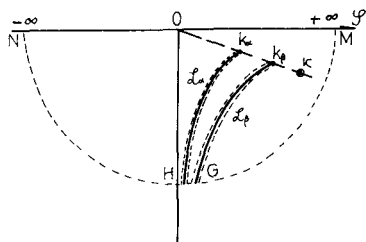


図-2

いま、

$$G(u) = \int_{-\infty}^\infty \Phi(\eta) d\eta \quad \text{とおけば}$$

$$\oint \Phi(\eta) d\eta = \int_M^N + \int_N^H + \int_H^G + \int_G^M = 2\pi i \sum \text{Res}$$

$$\text{そこで} \quad M, N \rightarrow \infty \quad \text{とすれば} \quad \int_{-\infty}^\infty \Phi(y) dy = -2\pi i \sum \text{Res} + \int_{L_a} \Phi(\eta) d\eta + \int_{L_\beta} \Phi(\eta) d\eta$$

しかるのち、 k_a , k_β を k (極 y_R の複素数値) を実軸上に戻して、上式の積分変換を行えば結局、式(12)は次式で与えられる。

$$G(u) = 2\pi i k e^{-i y_R \cosh u} + \int_0^\infty F_1(\tau) e^{-i a_0 \cosh u} d\tau + i \int_0^1 F_2(y) e^{-i y a_0 \cosh u} dy + i \int_1^\infty F_3(y) e^{-i y a_0 \cosh u} dy \quad (13)$$

ただし

$$k = -\frac{\sqrt{y_R^2 - 1/3}}{W(y_R)}$$

$$F_1(\tau) = -1/25 \times \tau^2 \sqrt{\tau^2 + 1/3} \{ (2\tau^2 + 1)^2 - 4\tau^2 \sqrt{\tau^2 + 1/3} \sqrt{\tau^2 + 1} \} / Z_1(\tau)$$

$$F_2(y) = -1/25 \times y^2 \sqrt{1/3 - y^2} \{ (2y^2 - 1)^2 + 4y^2 \sqrt{1/3 - y^2} \sqrt{1 - y^2} \} / Z_2(y)$$

$$F_3(y) = -45 \times y^4 (y^2 - 1/3) \sqrt{1 - y^2} / Z_3(y)$$

$$Z_1(\tau) = (\tau^2 + 1/3) \{ (0.4/2)^3 \tau^4 - 0.405 a_0 \}^2 + 0.3164 \times \{ (2\tau^2 + 1)^2 - 4\tau^2 \sqrt{\tau^2 + 1/3} \sqrt{\tau^2 + 1} \}^2$$

$$Z_2(y) = (1/3 - y^2) \{ (0.4/2)^3 y^4 - 0.405 a_0 \}^2 + 0.3164 \times \{ (2y^2 - 1)^2 + 4y^2 \sqrt{1/3 - y^2} \sqrt{1 - y^2} \}^2$$

$$Z_3(y) = \{ (1 - y^2) \sqrt{1/3 - y^2} \{ (0.4/2)^3 y^4 - 0.405 a_0 \} - 0.5625 \times (2y^2 - 1)^2 \}^2$$

$$+ 16 \times 0.3164 \times y^4 (1 - y^2) (y^2 - 1/3)$$

式(13)を式(11)に代入すれば

$$\bar{M}_R = 2\pi i \int_0^\infty K e^{-i\gamma_R a_0 \cosh u} \cosh u du + \int_0^\infty \int_0^\infty F_1(\tau) e^{-\tau a_0 \cosh u} \cosh u du d\tau \\ + i \int_0^\infty \int_0^\infty F_2(\gamma) e^{-i\gamma a_0 \cosh u} \cosh u du d\gamma + i \int_0^\infty \int_0^\infty F_3(\gamma) e^{-i\gamma a_0 \cosh u} \cosh u du d\gamma$$

上式に $H_1^{(2)}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ix \cosh u} \cosh u du$ なる関係式を適用すれば次式をうる。

$$\bar{M}_R = -i\pi^2 K H_1^{(2)}(\gamma_R a_0) + \int_0^\infty \int_0^\infty F_1(\tau) e^{-\tau a_0 \cosh u} \cosh u du d\tau \\ - i \frac{\pi}{2} \int_0^\infty F_2(\gamma) H_1^{(2)}(\gamma a_0) d\gamma - i \frac{\pi}{2} \int_0^\infty F_3(\gamma) H_1^{(2)}(\gamma a_0) d\gamma$$

そこで $H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iN_1(x)$ と変換を行えば、結局、式(10)は次式で与えられる。

$$(M_R)_{R=0} = -P e^{i\pi/4} \{ f_1(a_0) + i f_2(a_0) \} \quad (14)$$

ただし

$$f_1(a_0) = \frac{5a_0^2}{64\pi} \left\{ -\pi^2 K N_1(\gamma_R a_0) - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty F_2(\gamma) N_1(\gamma a_0) d\gamma - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty F_3(\gamma) N_1(\gamma a_0) d\gamma \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty F_1(\tau) e^{-\tau a_0 \cosh u} \cosh u du d\tau \right\}$$

$$f_2(a_0) = \frac{5a_0^2}{64\pi} \left\{ -\pi^2 K J_1(\gamma_R a_0) - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty F_2(\gamma) J_1(\gamma a_0) d\gamma - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty F_3(\gamma) J_1(\gamma a_0) d\gamma \right\}$$

いま、 a_0 の種々の値に対して式(14)における $f_1(a_0)$ 、 $f_2(a_0)$

の値を算出し、図示すれば図-3の結果をうる。

4. 結論

周期荷重が作用する場合における板と地盤との相互作用の解明の第一歩として、本可比較的簡単な式(5)で与えられる境界条件を考えれば、同条件のうち特に、板と地盤の変位が常に同一であるという条件(式(5-3))は物理的現象として一考すべき面があり、著者らの今後の研究課題である。

本報においては板のモーメントのみを問題として取り扱ったが同様の積分手法を用いれば、板の変位および地盤の応力、変位も算出可能であり、これについては次の機会に発表する予定である。

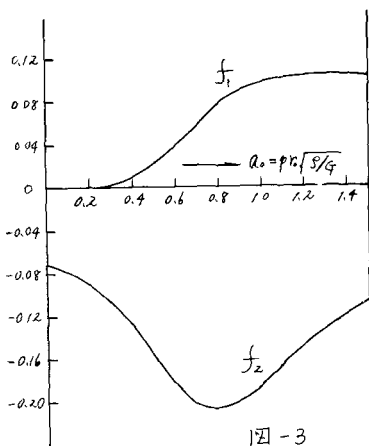


図-3

- 1) E. Reissner. "Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erzeugte Schwingungen eines homogen elastischen Halbraumes", Ingenieur Archiv, 7, 1936
- 2) G.N. Bycroft. "Forced Vibration of a Body on an Infinite Elastic Solid", Journal of App. Mech., 22, No.3, Sep. 1955
- 3) I. Toriumi. "Vibration in Foundation of Machines", Technical Report of Osaka University, 5, No.146
- 4) W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press. "Elastic Waves in Layered Media", McGraw-Hill Book