

九州大学 正員 山崎徳也

〇黒木健実

1. まえがき

さきに著者は、運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーをはじめ、振動方程式の誘導に必要な物理量をすべて階段状直線で近似した、いわゆる多質点系によるはりの弾塑性解析法¹⁾を発表した。

本報告は、これらの物理量を折れ線で近似することにより、上記手法の誤差を除去して精度の向上を図るとともに、この近似を用いて新たに誘導した振動方程式と Bi-linear 型の曲げモーメント—曲率関係を併用する簡便な応答計算法を提示するものである。

2. 基本式

基本式誘導の便宜上、片持ばりを例にとり、分割数が4の場合について述べることにする。一般に、たわみ y と接線角 θ との関係な y に接線角 θ と曲率 ϕ との関係はそれぞれ次のように表わされる。

$$\int dy = \int \theta dx, \quad \int d\theta = \int \phi dx \quad \text{ただし } dx: \text{ はりの微小長さ} \quad (1)$$

いま式(1)に、図-1のように折れ線で近似した曲率および接線角を適用すれば、分割点のたわみおよび接線角が次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{l}{8} \theta_1 \\ y_2 - y_1 &= \frac{l}{8} (\theta_1 + \theta_2) \\ y_3 - y_2 &= \frac{l}{8} (\theta_2 + \theta_3) \\ y_4 - y_3 &= \frac{l}{8} (\theta_3 + \theta_4) \end{aligned} \right\} (2) \quad \left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{l}{8} (\phi_0 + \phi_1) \\ \theta_2 - \theta_1 &= \frac{l}{8} (\phi_1 + \phi_2) \\ \theta_3 - \theta_2 &= \frac{l}{8} (\phi_2 + \phi_3) \\ \theta_4 - \theta_3 &= \frac{l}{8} \phi_3 \end{aligned} \right\} (3)$$

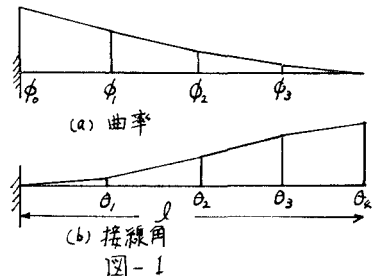


図-1

式(2), (3)より曲率 ϕ がたわみ y の関数として次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= -\left(\frac{8}{l}\right)^2 (12y_1 - 8y_2 + 4y_3 - y_4) \\ \phi_1 &= -\left(\frac{8}{l}\right)^2 (-11y_1 + 8y_2 - 4y_3 + y_4) \\ \phi_2 &= -\left(\frac{8}{l}\right)^2 (8y_1 - 7y_2 + 4y_3 - y_4) \\ \phi_3 &= -\left(\frac{8}{l}\right)^2 (-4y_1 + 4y_2 - 3y_3 + y_4) \end{aligned} \right\} (4)$$

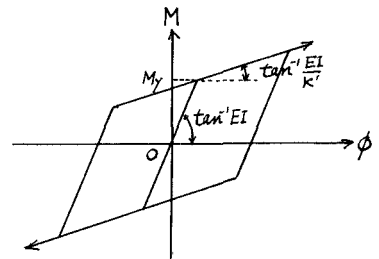


図-2

次に、断面の曲げモーメント—曲率曲線を、弾性時の曲げ剛性を EI 、塑性時のそれを EI/κ' とする Bi-linear 型 (図-2 参照) で近似すれば、任意時刻 t における曲げモーメント $M(t)$ は次式で表わされることになる。

$$M(t) = EI \left\{ \phi(t) \left(1 - \frac{1}{\kappa'}\right) - \phi^p(t - \alpha t) \right\} \geq M_y \left(1 - \frac{1}{\kappa'}\right) \quad \text{のとき} \quad M(t) = M_y \left(1 - \frac{1}{\kappa'}\right) + \frac{EI}{\kappa'} \phi(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(t) &\leq -M_y(1-\frac{1}{k}) & \text{のとき} & M(t) = -M_y(1-\frac{1}{k}) + \frac{EI}{k} \phi(t) \\ |\bar{M}(t)| &< M_y(1-\frac{1}{k}) & \text{"} & M(t) = EI \{ \phi(t) - \phi^p(t-\Delta t) \} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし Δt : 微小な時間間隔

式(5)より時刻 t における塑性曲率 $\phi^p(t)$ は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} |\bar{M}(t)| &\geq M_y(1-\frac{1}{k}) & \text{のとき} & \phi^p(t) = \phi^p(t-\Delta t) + \frac{k-l}{EI} \{ M(t) - M(t-\Delta t) \} \\ |\bar{M}(t)| &< M_y(1-\frac{1}{k}) & \text{"} & \phi^p(t) = \phi^p(t-\Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、式(4)の右辺のたわみを式(5)の曲げモーメントと関係づけるために、図-3を参照して下記の運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー U を誘導し、Lagrange's Equation を適用すれば、弾性時・塑性時に共通する運動方程式として式(7)が得られる。

$$T = \frac{1}{2} \int m \dot{y}^2 dx = \frac{m l}{16} (2\dot{y}_1^2 + 2\dot{y}_2^2 + 2\dot{y}_3^2 + \dot{y}_4^2)$$

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx = \frac{l}{16EI} (M_0^2 + 2M_1^2 + 2M_2^2 + 2M_3^2)$$

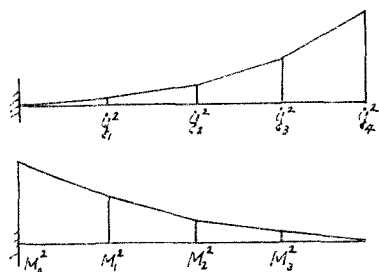


図-3

ただし m : はりの単位長さ当たりの質量

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 - \frac{1}{m} \left(\frac{P}{l} \right)^2 (6M_0 - 11M_1 + 8M_2 - 4M_3) &= \frac{Q_1}{ml} \\ \ddot{y}_2 - \frac{1}{m} \left(\frac{P}{l} \right)^2 (-4M_0 + 8M_1 - 7M_2 + 4M_3) &= \frac{Q_2}{ml} \\ \ddot{y}_3 - \frac{1}{m} \left(\frac{P}{l} \right)^2 (2M_0 - 4M_1 + 4M_2 - 3M_3) &= \frac{Q_3}{ml} \\ \ddot{y}_4 - \frac{1}{m} \left(\frac{P}{l} \right)^2 (-M_0 + 2M_1 - 2M_2 + 2M_3) &= \frac{Q_4}{ml} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし Q : 一般力

よって $\ddot{y}$ を差分化すれば結局にのみ $y(t+\Delta t)$ が次式で求められる。

$$y(t+\Delta t) = 2y(t) - y(t-\Delta t) + \Delta t^2 \ddot{y}(t) \quad (8)$$

式(4),(5),(6),(7)および式(8)が本法の基本式で、荷重および初期条件が与えられれば、これらの式を繰り返し計算により片持ばりの変形挙動が逐次解明されることになる。

3. 計算例

ときに既述した変位系置換法²⁾と本法の精度を比較検討するに、分割数を変化させて片持ばりの1次固有振動数と算出した。表-1は数値解に対する比を表わしたもので、これより本法は変位系置換法に較べて良好な近似解法といえる。今後さらに高次の振動数および応答について検討する必要がある。

表-1 片持ばりの1次固有振動数

分割数	本法	変位系置換法
1	0.229	0.238
2	0.226	0.21
3	0.225	0.222
4	0.227	0.23
5		0.234

1) 山崎 豊木: はりの動的弾塑性解析, 九州大学工学集報, 第40巻 第6号, 昭和43年1月

2) 山崎 豊木, 片持ばりの動的弾塑性非線形変形について, 第24回土木学会年次学術講演会講演集, 昭和44年9月