

九州大学 正 員 山崎徳也

九州大学 学生員 高橋和雄

1 緒言 最近の軽量構造物に生ずる振動問題では、薄板のたわみが板厚と同程度またはそれ以上となるため、微小変形を前提とする線形板理論は適用できず、板の有限変形理論を用いて解析しなければならないことは周知のとおりである。しかしながら、力学的問題に関してその基礎式の数学的取扱いが困難であるため、これまで、きわめて特殊な矩形板および円板の非線形振動についてその近似解法が報告されていくに過ぎない。すなわち、Kármán¹⁾の有限変形理論にもとづいて、Chu および Herrmann²⁾は全周辺単純支持矩形板を摂動法を用いて解き、また、Yamaki³⁾は全周辺単純支持または固定の矩形板および円板をラーキン法を用いて解析した。さらに、Hashi および Moeen⁴⁾は全周辺単純支持矩形板を、また Waki⁵⁾は1対辺のみ単純支持とれる矩形板や、単純支持または固定の円板を Berger⁶⁾の有限変形理論にもとづいてそれぞれ解析した。Berger の式は板の歪エネルギーの第2不変量を無視した実用近似式であるが、これによる Hashi や Waki の解析結果が前述の Chu らの厳密な基礎式にもとづく近似解と工学的に十分な精度で合致することが立証されており、さらに、Kármán の式に比較して取扱いが容易なため、複雑な形状および境界条件をもつ板の非線形振動問題への適用が可能である。

以上の考察から、著者らはいまだ未解決の各種形状板の非線形振動問題の解析を行ない、振幅や面内力が振動数に及ぼす影響について解明せんとするものであり、すでに連続矩形板に関する研究⁷⁾を報告したが、本研究では扇形板の非線形振動の解を求め、振幅が振動数に及ぼす影響について考察せんとするものである。

2 解法 板の有限変形に関する Berger の式にたわみによる慣性力を加えた運動方程式は次のことく極座標表示される。

$$D\nabla^4 w - N\nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Nr_t}{12D} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{(1-\nu)}{Eh} (N_r + N_\theta) \quad (2)$$

ここに、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad r, \theta \text{ : 極座標系}$$

是、板厚、 ρ 、板の密度、 $D = \frac{ER^3}{12(1-\nu^2)}$ 、板剛度、 E 、板の弾性係数、 ν 、板のポアソン比、 u, v 、板の半径、接

線方向の面内変位、 N_r, N_θ 、板の半径、接線方向の面内力、 t 、時間、 w 、板のたわみ

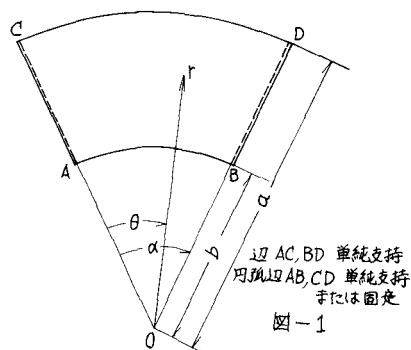
N は r, θ に無関係な定数であるから、式(2)を図-1に示すこと扇形板全領域にわたって積分すれば次式がえらる。

$$\frac{Nr_t}{12D} \alpha (a^2 - b^2) = \int_b^a \int_0^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) r dr d\theta + \int_b^a \int_0^\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} r dr d\theta + \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (3)$$

ここに、 a, b 、扇形板の外径、内径、 α 、扇形板の間角

扇形板の全周辺に沿って面内変位 u, v が起こらないものとすれば、式(3)の右辺第1項および第2項は0となるゆえ、式(3)は次のことく簡単化される。

$$\frac{Nr_t}{12D} \alpha (a^2 - b^2) = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (4)$$



板の境界条件が単純支持または固定とすれば、式(4)の右辺は結局次のごとく部分積分される。

$$\frac{N R^2}{12 D} \theta (\alpha^2 - \beta^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha W (\nabla^2 W) r dr d\theta \quad (5)$$

(たがって、残された問題は式(5)のもとに式(1)を解くことに帰着する。式(1)の解を厳密に求めることが困難であるから、カリーキン法を用いて近似解を求めることにする。すなわち式(1)の解を次のごとく仮定する。

$$w = C W(r, \theta) F(t) \quad (6)$$

ここに、 C 、振幅、 $W(r, \theta)$ 、座標関数、 $F(t)$ 、時間関数

式(6)の時間関数を未知関数に選ひ、座標関数として、扇形板の線形振動の規準関数を仮定すれば、図-1に示すとき扇形板の $W(r, \theta)$ に関して次式が成立する。

$$\nabla^2 W = \frac{\rho R \omega^2}{D} W \quad (7) \quad \text{ここに、} \omega, \text{線形振動の固有円振動数}$$

本題の扇形板は直線辺 AC 、 BD がいずれも単純支持されているゆえ、これらの境界条件を満足する $W(r, \theta)$ は次のごとく仮定する。

$$W(r, \theta) = R(r) \sin n\theta \quad (8) \quad \text{ここに、} \alpha_n = \frac{n\pi}{\alpha}, n=1, 2, \dots, R(r), r \text{ のみの関数}$$

式(8)を式(7)に代入すれば、次のときBesselの微分方程式および変形されたBesselの微分方程式に分解される(文献(8)参照)。

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\frac{\alpha_n^2}{r^2} - \frac{R^2}{a^2} \right) R = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\frac{\alpha_n^2}{r^2} + \frac{R^2}{a^2} \right) R = 0 \quad (10) \quad \text{ここに、} R = a \sqrt{\frac{\rho R \omega^2}{D}} \text{ (線形振動の固有値)}$$

式(9)の解は α_n 次の第1種、第2種Bessel関数 $J_{\alpha_n}(Rr)$ 、 $Y_{\alpha_n}(Rr)$ で与えられ、式(10)の解は α_n 次の変形された第1種、第2種Bessel関数 $I_{\alpha_n}(Rr)$ 、 $K_{\alpha_n}(Rr)$ で与えられるゆえ、一般解はこれらを加え合わせた次式で与えられることになる。

$$R(r) = A_{\alpha_n} J_{\alpha_n}(Rr) + B_{\alpha_n} Y_{\alpha_n}(Rr) + C_{\alpha_n} I_{\alpha_n}(Rr) + D_{\alpha_n} K_{\alpha_n}(Rr) \quad (11)$$

ここに、 A_{α_n} 、 B_{α_n} 、 C_{α_n} 、 D_{α_n} 、積分定数、 $r = \frac{r}{a}$

式(11)の積分定数 A_{α_n} 、 $\sim$ 、 D_{α_n} は扇形板の円弧辺 AB および CD の境界条件により決定される。すなわち、円弧辺にあける4つの境界条件式から、扇形板の自由振動に関する固有値 R がえられる。この結果を式(11)に代入し、正規化ののち、式(8)に代入すれば規準関数が算定される。式(6)および式(7)を式(1)に代入すれば、次式がえられる。

$$\rho R \omega^2 W F - N \nabla^2 W F + \rho R \ddot{W} F = 0 \quad (12)$$

式(12)の左辺に $W r dr d\theta$ をかけて、積分すれば次式をうる。

$$F \rho R \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta + F \rho R \omega^2 \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta - F N \int_b^a \int_0^\alpha W (\nabla^2 W) r dr d\theta = 0 \quad (13)$$

式(5)および式(13)より、 N を消去のうえ、整理すれば、時間に関する常微分方程式が次のごとく求められる。

$$\ddot{F} + \beta_1 \dot{F} + 2\beta_2 F^3 = 0 \quad (14) \quad \text{ここに、} \beta_1 = R^2 \frac{D}{\rho R a^2}, \quad 2\beta_2 = \frac{6}{1-\mu} R^2 \frac{C^2}{R^2} \frac{r^2}{R^2} \frac{D}{\rho R a^2}, \quad \mu = \frac{b}{a}$$

$$\gamma = \int_b^a \{ A_{\alpha_n} J_{\alpha_n}(Rr) + B_{\alpha_n} Y_{\alpha_n}(Rr) + C_{\alpha_n} I_{\alpha_n}(Rr) + D_{\alpha_n} K_{\alpha_n}(Rr) \} \{ A_{\alpha_n} J_{\alpha_n}(Rr) + B_{\alpha_n} Y_{\alpha_n}(Rr) - C_{\alpha_n} I_{\alpha_n}(Rr) - D_{\alpha_n} K_{\alpha_n}(Rr) \} r dr$$

$$\eta = \int_b^a \{ A_{\alpha_n} J_{\alpha_n}(Rr) + B_{\alpha_n} Y_{\alpha_n}(Rr) + C_{\alpha_n} I_{\alpha_n}(Rr) + D_{\alpha_n} K_{\alpha_n}(Rr) \}^2 r dr$$

式(14)は3次の非線形微分方程式をもつ質点の運動方程式と同じもので、Duffing型方程式と呼ばれ、非

線形方程式として最も簡単な形の1つであり、したがって、式(14)は既知の方法で容易に積分できる。

初期条件を $w(r, \theta, 0) = C W(r, \theta)$, $\dot{w}(r, \theta, 0) = 0$

(15)

とすればFに関して次のように表わしうる。

$$F(0) = 1, F'(0) = 0 \quad (16) \quad \text{式(14)を1回積分すれば次式がえられる。}$$

$$\frac{F''}{\beta_3} + \frac{\beta_1}{\beta_3} F' + F' + C' = 0 \quad (17) \quad \text{ここに、} C', \text{積分定数}$$

式(17)の積分定数C'を式(16)を用いて決定すれば、 $C' = -\frac{\beta_1}{\beta_3} - 1$ となり、式(17)は次のように求められる。

$$\frac{F''}{\beta_3} = -\left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} + 1 \right) F' - \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} + 1 \right) \right\} \quad (18)$$

式(18)の解は $\frac{\beta_1}{\beta_3}$ の各値により異なるが、本題の扇形板の場合には $\beta_1, \beta_3 > 0$ したがって $\frac{\beta_1}{\beta_3} > -1$ となることか数値的に確認される中、式(18)の解はJacobiの楕円関数における関数cnと与えられ、次のように求められる。

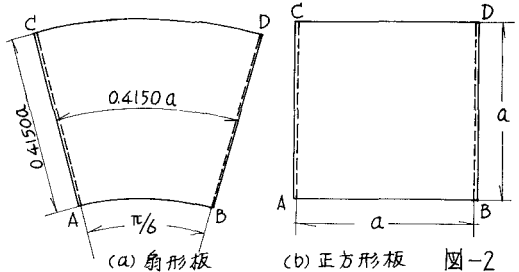
$$F = \text{cn} \left(\sqrt{2\beta_3 + \beta_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{\beta_1}{\beta_3}}} \right) \quad (19) \quad \text{ここに、} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{\beta_1}{\beta_3}}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{\frac{\beta_1}{\beta_3}} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_3}}} \quad (\text{楕円関数の母数})$$

関数cnは $4K$ ($K = \int_0^1 dx / \{(1-x^2)(1 - \frac{x^2}{2 + \frac{\beta_1}{\beta_3}})\} = \int_0^{\pi/2} d\theta / \{1 - \frac{1}{2 + \frac{\beta_1}{\beta_3}} \sin^2 \theta\}^{\frac{1}{2}}$, 第1種完全楕円積分)の周期をもつから、振動数 V^* は次式で与えられる。

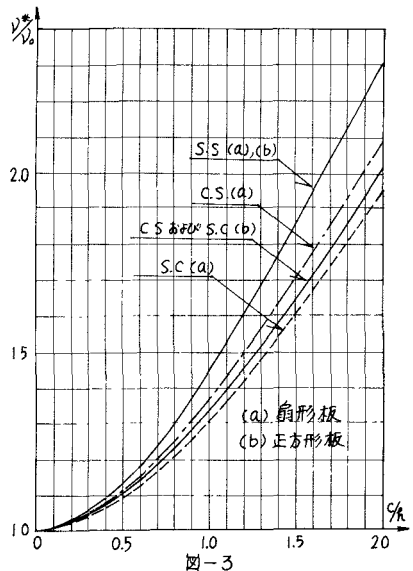
$$V^* = \frac{\sqrt{2\beta_3 + \beta_1}}{4K} \quad (20)$$

式(20)の振動数 V^* と扇形板の線形振動数 $V_0 = \frac{\pi^2 D}{2\pi^2 \rho h a^4} (= \frac{1}{2K} \sqrt{\beta_1})$ との比を求めれば、振動数 V^* に及ぼすパラメーターを無次元化することかでき、次式をうる。

3計算例 図-2(a)に示すことく、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\mu = 0.5850$
(扇形板の中央円弧長と $a-b$ の比が1の場合)あ
よび $V = 0.3$ なる扇形板において、辺AB, CDの境界
条件がいずれも単純支持の場合(SS), 辺AB固定、
辺CD単純支持の場合(CS)および辺AB単純支持、
辺CD固定の場合(SC)の3例を并衆として、その



基本振動の特性を求めることにする。まず、特性計算に必要な諸量 μ, ν, η の各ケースについて算出すれば、表-1(a)に示すことかえらる。式(21)より振動数比 $\frac{V^*}{V_0}$ と振幅比 $\frac{S}{S_0}$ との関係と求め、これをプロットすれば、図-3のことかえらる。図より明らかなことく、振動数比は振幅比の増大にともなうて増加することかわるが、3種の境界条件の異なる扇形板について振幅比の影響と比較すれば、SSの場合が最も大きく、CSの場合がこれに次ぎ、SCの場合が最も小さく現われている。なお、比較対照のために、図-2(b)に示す1辺単支持正方形板において、辺AB, CDがともに単純支持の場合(SS)およびいずれの辺が固定の場合(CSまたはSC)の2例と図-3に併記した。図よりSSの場合は正方形板の場合と合致するが、CSおよびSCの場合には扇形板の特性が現わることかわる。



次に、扇形板の形状パラメータ μ , α が振動数比 $\frac{\nu^*}{\nu}$ に及ぼす影響を調べるために、まず、円弧辺 AB, CD がともに単純支持される扇形板において、 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\nu = 0.3$ を一定としたとき、 μ を種々変化させた場合の k, φ, η の値を算出すれば、表-1(b) のこととえられる。各ケースの演算諸量を用いて、式(21)から振動

	境界条件	α	μ	k	φ	η	$\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\eta^2}$
(a)	S.S	$\pi/6$	0.5850	10.7230	0.1644	0.1642	0.2503
	C.S	$\pi/6$	0.5850	11.4803	0.1392	0.1517	0.1945
	S.C	$\pi/6$	0.5850	11.9934	0.1229	0.1419	0.1619
(b)	S.S	$\pi/3$	$1/6$	6.3339	0.2403	0.2363	0.2513
	S.S	$\pi/3$	$2/6$	6.5556	0.2223	0.2213	0.2512
	S.S	$\pi/3$	$3/6$	7.4804	0.1862	0.1871	0.2470
(c)	S.S	$\pi/3$	$1/2$	7.4804	0.1862	0.1871	0.2470
	S.S	$\pi/4$	$1/2$	8.2672	0.1872	0.1872	0.2497
	S.S	$\pi/6$	$1/2$	10.1704	0.1865	0.1857	0.2496

表-1

数比 $\frac{\nu^*}{\nu}$ が算出されるが、 μ の変化に無関係であることがわかり、したがっていずれの場合も図-3 の S.S の場合に一致する。この事実は式(21)における $\frac{\varphi^2}{\eta^2}$ で表わされる振動の影響が、本例ではいずれの μ の値に対しても $\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\eta^2} = 0.25$ となることに起因するものである。さらに、同じ境界条件の扇形板において、 $\mu = 0.5$, $\nu = 0.3$ を一定とし、各種 α 値に対する諸量を算出すれば、表-1(c) のこととてある。本例においても、 $\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\varphi^2}{\eta^2} = 0.25$ したがって $\frac{\varphi^2}{\eta^2} =$ 一定となる中、振動数比 $\frac{\nu^*}{\nu}$ は α の影響を受けないことがわかる。すなわち、Bergen の有限変形理論によれば全周辺単純支持矩形板の非線形振動特性が板の辺長比に無関係であることを Wagh⁽⁵⁾ がすでに明らかにしているが、上述のことと、このことは扇形板についても成立し、振動数比 $\frac{\nu^*}{\nu}$ が μ , α に無関係で、矩形板の場合の振動数比 $\frac{\nu^*}{\nu}$ に合致することとわかる。

4 結語 式(21)に含まれる Bessel 関数を含む定積分 φ , η は、これを直接行なうことは面倒であるから、Simpson の $\frac{1}{3}$ 公式による数値積分を行った。本研究では、円弧辺が単純支持される場合についての μ , α が振動数比に及ぼす影響を論じたが、他の境界条件についても現在研究を進めている。また、Bergen の理論を用いれば、扇形板のたたき問題や振動中の応力解析および非線形強制振動問題も解析可能である。

参考文献

- (1) Jk von Kármán, Festigkeitsprobleme in Maschinenbau, Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Vol 4 (1910)
- (2) H Chu, G Herrmann, Influence of large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, J appl Mech, Vol 23 (1956)
- (3) N Yamaki, Influence of large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic plates, Z. angew Math Mech, Vol 41 (1961)
- (4) W A Nash, J R. Modeer, Certain Approximate Analyses of nonlinear Behavior of plates and shallow shells, Proc Symp on the Theory of Thin Elastic shells, Delft, The Netherlands, August, 1959,
- (5) Them Wagh, large Amplitude Flexural Vibrations of Rectangular plates, Int J mech Sci, Vol 5 (1963)
- Vibration of Circular plates at large Amplitudes, Proc ASCE, J Engrg. mech Div EM5 (Oct 1963)
- (6) H M Bergen, A new Approach to the Analysis of large Deflections of plates, J appl Mech, Vol 22 (1955)
- (7) 山崎 高橋, 連続矩形板の非線形自由振動, 第19回応用力学連合講演会論大抄録集 (1969)
- (8) 山崎 樽木・金子, 扇形板の自由振動解析, 九州大学工学集報, 第42巻, 第4号 (昭和44年8月)