

I-1 等角写像法による任意形板の固有振動数の算定について

九州大学工学部 正員 山崎徳也
 “ “ 学生員 後藤恵三郎
 “ “ “ 〇村里正彦

1. 序言

薄い平板の自由振動に関する基礎微分方程式は、平板の形状が直角座標、極座標あるいは円座標などの通常座標系により表わされるときは容易に解かれるが、複雑な形状の場合には、これら上記座標系を用いて表わすことが困難なるため、基礎微分方程式の解をうることは容易でない。かかるとき、従来は専ら階差法、有限要素法などの近似解法が使用されてきたが、等角写像法を用いた解法は極めて少なく、著者らの知るところ、わずかに Laura らの研究¹⁾があるのみである。すなわち、Laura らは、平板の領域を単位円に写像し、複素数を用いた Galerkin 法により固有振動数を近似的に決定している。

著者らは、かかる現状に鑑み、ここに任意形板の固有振動数算定の一手法を提示せんとするもので、文献(1)と同様に、与えられた平板の領域を単位円に等角写像するが、Rayleigh-Ritz 法を用いて固有振動数を近似的に算定し、さらに、隅を丸めた正多角形板を算例として、隅の丸味が固有振動数に及ぼす影響を及ぼすかについて吟味検討した。

2. 基礎方程式

薄板の自由振動に関する基礎微分方程式は、板のたわみを w として、周知のごとく直角座標 (x, y) により次式で与えられる。

$$\nabla^4 w(x, y, t) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここに ρ : 板の密度, h : 板厚, t : 時間, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度, E : 板のヤング率, ν : ポアソン比。

式(1)の一般解は次式のごとく変数分離形で表わされる。

$$w = w_1(x, y) \sin p t \quad \text{ここに} \quad p: \text{板の固有円振動数} \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して、次式をうる。

$$\nabla^4 w_1(x, y) - \lambda^2 w_1(x, y) = 0 \quad \text{ここに} \quad \lambda^2 = \rho h p^2 / D \quad (3)$$

さらに、式(3)を複素数表示すれば、次式となる。

$$16 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}(z, \bar{z}) - \lambda^2 w_1(z, \bar{z}) = 0 \quad (4)$$

ここに $z = x + iy$ で、バー符号はその変数または関数が共役数であることを意味する。

z -面内にある平板の領域を z -面内の単位円に等角写像する関数を、一般に次式のごとく表示する。

$$z = w(\zeta) \quad \text{ここに} \quad \zeta = re^{i\theta}, \quad (r, \theta): \text{極座標}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (5)$$

かかるとき、式(4)は式(5)を用いて次式に変換される。

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}^2} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}^2} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \frac{d^2 z}{d\zeta^2} \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{\zeta}^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \frac{d^2 z}{d\zeta^2} \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{\zeta}^2} - \frac{\lambda^2}{16} w_1 \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^3 \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \right)^3 = 0 \quad (6)$$

一方、境界条件は (x, y) 座標により次式で与えられる。

$$\text{周辺固定: } w_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi}(x, y) = 0 \quad \text{along contour } L \quad (7\cdot a)$$

$$\text{周辺単純支持: } w_1(x, y) = 0, \quad M_\xi(x, y) = 0 \quad \text{along contour } L \quad (7\cdot b)$$

ここに L は ξ -面での領域の境界を示し、 ξ は L に立てた法線方向である。

式(7)を式(3)と同様に $(\zeta, \bar{\zeta})$ 座標に変換して次式をうる。

$$\text{周辺固定: } w_1(\zeta, \bar{\zeta}) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r}(\zeta, \bar{\zeta}) = 0 \quad \text{along contour } L \quad (8\cdot a)$$

$$\text{周辺単純支持: } w_1(\zeta, \bar{\zeta}) = 0, \quad M_r(\zeta, \bar{\zeta}) = 0 \quad \text{along contour } L \quad (8\cdot b)$$

ここに L は r -面での領域の境界を意味し、式(5)において $r=1$ とおくことによりえられるものである。

平板の形状が簡単で通常の座標系により表わされる場合には、式(7)の境界条件のもとに式(3)の基礎微分方程式を解いて、入が容易に決定されるが、複雑な形状の場合には、式(8)の境界条件と式(6)の基礎微分方程式とを同時に満足するたわみ函数 $w_1(\zeta, \bar{\zeta})$ を求めなければならぬ。しかし、かかる $w_1(\zeta, \bar{\zeta})$ を求めることは極めて困難であるゆえ、近似解法が必要となり、本論では Rayleigh-Ritz 法によることにする。

3. Rayleigh-Ritz 法.

与えられた平板のたわみ全ポテンシャルエネルギーを Π とすれば、上記固有振動数を求める問題は、与えられた境界条件下において Π の停留値を求める問題と同値である。すなわち

$$\delta \Pi = 0 \quad (9)$$

ここに $\Pi = V - T$ で、 V 、 T はそれぞれ板のひずみエネルギーおよび外力のなす仕事である。これは (x, y) 座標においては、周知のごとく次式で与えられる。

$$V = \frac{D}{2} \int_S \left[(\nabla^2 w_1)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dS \quad (10\cdot a)$$

$$T = \frac{1}{2} \lambda^2 D \int_S \{ w_1(x, y) \}^2 dS \quad (10\cdot b)$$

ここに S : 積分すべき板の領域

式(10)を複素数表示して次式をうる。

$$V = 4D \int_S \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{z} \partial z} \right)^2 + (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{z}^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{z} \partial z} \right)^2 \right\} \right\} dS \quad (11\cdot a)$$

$$T = \frac{1}{2} \lambda^2 D \int_S \{ w_1(z, \bar{z}) \}^2 dS \quad (11\cdot b)$$

さらに、式(5)を式(11)に代入すれば、各エネルギー式は $(\zeta, \bar{\zeta})$ 座標において次式となる。

$$V = 4D \int_S \left\{ 2 \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta} \frac{1}{w'(\zeta) \bar{w}'(\bar{\zeta})} \right]^2 + (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{\zeta}^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \frac{1}{w'(\zeta) \bar{w}'(\bar{\zeta})} \right]^2 - \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{\zeta}^2} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \frac{w'(\zeta) \bar{w}'(\bar{\zeta})}{\{ w'(\zeta) \bar{w}'(\bar{\zeta}) \}^3} \right\}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{w_1'(z) \bar{w}_1'(\bar{z})}{\{w_1'(z) \bar{w}_1'(\bar{z})\}^2} - \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} \frac{1}{w_1'(z) \bar{w}_1'(\bar{z})} \right\}^2 \Bigg] dS \quad (12 \cdot a)$$

$$T = \frac{1}{2} \lambda^2 D \int_S \{w_1(z, \bar{z})\}^2 dS \quad (12 \cdot b)$$

ここに Re は $\{ \}$ 内の函数の実数部を、プライム符号は $()$ 内の変数による微分を、それぞれ表す。
 周辺固定の場合には、式 $(12 \cdot a)$ は次式となる。

$$V = 8D \int_S \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{1}{w_1'(z) \bar{w}_1'(\bar{z})} \right\}^2 dS \quad (12 \cdot c)$$

たわみ函数 w_1 は、 w_{1k} を境界条件のみを満足する独立な函数として、 w_{1k} の一次結合により次式のごとく仮定される。

$$w_1 = \sum_{k=1}^K b_k w_{1k} \quad \text{ここに } b_k: \text{未定係数} \quad (13)$$

式 (13) を式 (9) に代入すれば、すべての b_k に関して次の方程式が成立する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_k} = \frac{\partial V}{\partial b_k} - \frac{\partial T}{\partial b_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (14)$$

式 (14) より $(K \times K)$ の係数行列式がえられ、この式の最低根が所要の λ を与えることになる。

周辺固定の場合には、たわみ函数は、式 $(8 \cdot a)$ を満足することく次式で仮定される。

$$w_1 = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (z \bar{z})^k]^2 \quad (15 \cdot a)$$

周辺単純支持の場合には、変分理論によれば、仮定するたわみ函数は式 $(8 \cdot b)$ の境界条件のうち、幾何学的境界条件の $w_1 = 0$ を必ず満足しなければならぬが、力学的境界条件(自然境界条件)の $M_r = 0$ を満たすことは必ずしも必要ではない。よて、 w_1 はこの場合次式と仮定される。

$$w_1 = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (z \bar{z})^k] \quad (15 \cdot b)$$

4. 算例

(1) 円板 円板の写像函数は、半径を a として次式で与えられる。

$$z = a \zeta \quad (16)$$

式 (12) 、 (15) および (16) と式 (14) より、各境界条件に対して K の各値につき λ が算定される。周辺固定の境界条件のもとに、 λa^2 を K を変数として示せば、図-1 の結果となり、 $K=2$ でかなり高精度の解がえられることがわかる。なお、図中の一点鎖線は厳密解である。

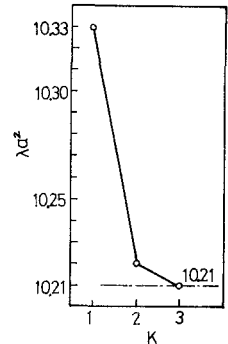


図-1 円板(周辺固定)

(2) 隅を丸めた正多角形板 この場合の写像函数は、文献(2)より次のごとく、有限級数で与えられる。

$$z = 2a(A\zeta + B\zeta^{m+1} + C\zeta^{2m+1} + \dots \text{(有限)}) \quad (17)$$

ここに a : 正多角形の辺心距、 m : 正多角形の辺数、 $A, B, C, \dots$: 実数係数

本論では、隅を丸めた正方形板 ($m=4$) および正八角形板 ($m=8$) を取扱うこととし、これら形状につき式 (17) の係数 $A, B, C, \dots$ を隅の丸味 $\rho = B/2a$ (R : 隅角部の曲率半

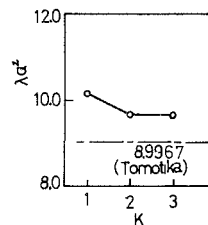


図-2 正方形板(周辺固定) $\rho = 0.20$

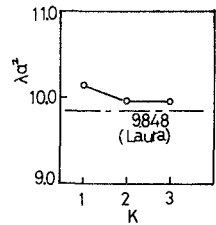


図-3 正八角形板(周辺固定) $\rho = 0.125$

径)に対して示せば、表-1のごと

表-1 写像函数の係数

くなる。これより容易に判断されるごとく、式(17)において4項以下の係数は前3項に比較して小さく無視しうるゆえ、ここでは最初の3項のみを用いて入を算定した。図-2および図-3は、周辺固定の境界条件のもとに、それぞれ $\rho=0.20$ の正方形板および $\rho=0.125$ の正八角形板の λ_0^2 を K を変数として示したもので、これ

形状	$\rho=R/2a$	A	B	C	D	E
正方形	0.50	.500000	0	0	0	0
	.45	.514395	-.008924	-.005984	-.000965	.001945
	.40	.522333	-.021137	-.002215	.000639	.000593
	.35	.528649	-.031687	.002560	.000651	-.000143
	.30	.533496	-.040704	.008299	-.000888	-.000374
	.25	.536671	-.047457	.014407	-.004533	.000698
正八角形	.20	.538114	-.051244	.019779	-.007769	.004239
	0.50	.500000	0	0	0	0
	.45	.501571	.000422	-.000980	-.002197	.001469
	.40	.504696	-.003576	-.001101	-.000421	.000525
	.35	.506570	-.006249	-.000548	.000125	.000158
	.30	.507999	-.008477	-.000279	.000247	-.000038
正八角形	.25	.509141	-.010420	.001298	.000085	-.000140
	.20	.510012	-.012055	.002457	-.000388	-.000111
	.15	.510590	-.013256	.003591	-.001207	.000238
	.125	.510769	-.013651	.004041	-.001593	.000639

より $K=2$ でほぼ一定値に収斂することが認められる。また、図中の点鎖線はそれぞれ最近代の尖頂をもつ形状 ($\rho=0$) に対する厳密解³⁾ および Laura らの Galerkin 法による隅の丸味を未考慮の近似解²⁾ であり、 $K=3$ でのこれらとの差違は、前者で 7.0%、後者で 1.2% となる。

さらに、 λ_0^2 を隅の丸味 ρ に対して示せば (ただし $K=3$)、正方形板で図-4、正八角形板で図-5の結果をえ、固有振動数は、正方形板で $\rho=0.35$ 、正八角形板で $\rho=0.2$ のとき最小値を示す。一般に、 ρ が増え隅の丸味が増大して板形状が円に近づくに伴い、振動数は単調増加すると考えられるが、実際には、以上に示すごとく、尖頂をもつ形状 ($\rho=0$) と円 ($\rho=0.5$) との間の、ある程度隅を丸めた形状 ($\rho=\rho_m$) のときに固有振動数は最小値をとり、 ρ が 0 より ρ_m に近づくに従い減小して、以後 ρ が 0.5 になるまで固有振動数は増大し、 $\rho=0.5$ のとき円板の値になる。

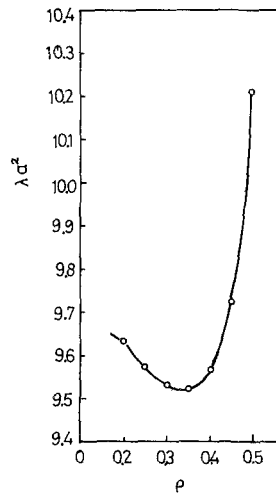


図-4 正方形板(周辺固定)

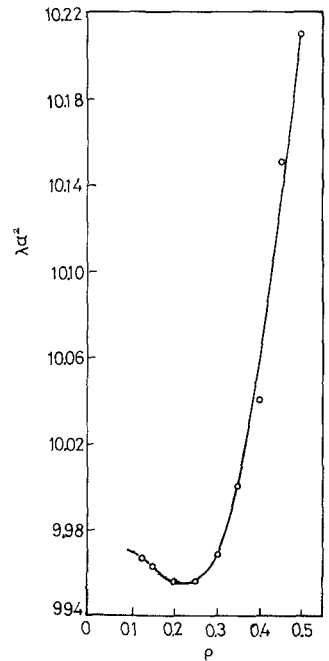


図-5 正八角形板(周辺固定)

- 参考文献 1) P.A. Shahady, R. Passarelli, and P.A. Laura : Application of Complex-Variable Theory to the Determination of the Fundamental Frequency of Vibrating Plates, Jour. Acous. Soc. Amer., 42-4, 1967.
 2) T. Yamazaki and K. Gotoh : Analysis of Thin Elastic Plates with Arbitrary Shapes by Means of a Complex Variable Method, 第15回橋梁・構造工学研究発表会論文論文集, 昭45年(印刷中).
 3) S. Tomotika : The Transverse Vibration of a Square Plate Clamped at Four Edges, Phil. Mag., 21, 1936.