IV-9　地震時に於ける斜組杭の挙動

九州大學工學部　正員　小坪清眞
同上　學生員　荒牧軍治
同上　○學生員　川人達男

1．緒言

近年，土木構造物に斜組杭が多く使用されているが，その耐震設計法は通常，上部構造物に地震時慣性力が静的に水平方向に作用するように取扱っている。すなわち，地盤は深さ方向に同一振動を行い杭の変位に比例した抵抗を及ぼすとしている。しかし，地盤はせん断振動を行いその変位は深さ方向に一定でないと考えられる。従って杭の変位はこの地盤の変位からの影響を受け，これを無視した杭の変位と当然違うであろう。また，この相違は杭の地中部の深さ，土のせん断弾性係数，あるいは土の地盤反力係数等の要素によっても影響を受けるであろうと考えられる。そこで，これらの要素の値を種々変え，後述の仮定を用いて地震時の地盤のせん断振動による変位の影響を考えた斜組杭の理論的考察を試みた。

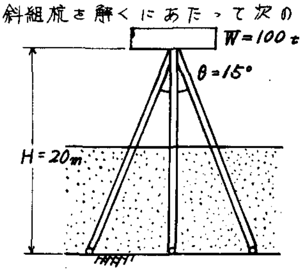
2．地震時にかる斜組杭の解析

2-1．基本的な考え方と仮定

地盤が変形しない場合の斜組杭のr次の振動型をY_rとすると杭変位y'は$y'=\sum a_r Y_r$で表わされ，また，地盤のP次の振動型をU_pとすると地盤変位uは$u=\sum b_p U_p$と表わされる。

この地盤変形による杭変位を$\bar{y}$とし，U_pなる振動型の変形を地盤が示す時の杭の振動型を$\bar{Y}_p$とすると，$\bar{y}=\sum b_p \bar{Y}_p$となる。従って杭の実際の変位$y$は$y=y'+\bar{y}$で表わされる。

この理論に基き modal analysis を用い動的解析を行う。この斜組杭を解くにあたって次のような仮定を設ける。



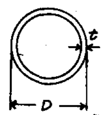
1．地盤のせん断弾性係数，地盤反力係数は深さ方向に一定．

2．杭下端は基盤に到達していてピン構造とし，杭上端は回転拘束である。即ち，ロッキング振動は行わないものとする。

3．直杭は曲げのみを受け，斜杭は曲げと軸力を受ける。

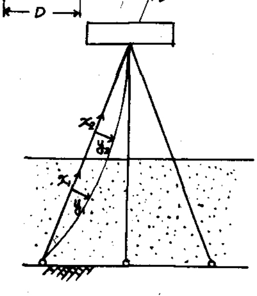
4．杭長は20mとし，土の深さは5,10,15mで代表させる。

5．地盤反力係数kは，2，5，8 kg/cm³とする。



杭断面図
D = 50 cm, t = 1.8 cm
w = 0.0078 kg/cm³

2-2．地盤が変形しない場合の杭の固有振動数及び振動型



(a)斜杭の曲げ基礎微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{wA}{g}\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(EI\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2}\right) - kDy_1 & \cdots\cdots \text{地中部} \\ \dfrac{wA}{g}\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(EI\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2}\right) & \cdots\cdots \text{空中部} \end{cases}$$

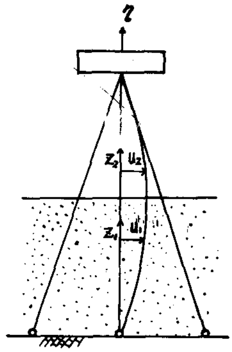
$y_1 = Y_1 \sin nt$，$y_2 = Y_2 \sin nt$ とし，

$S^4 = \dfrac{1}{4EI}\left(kD - \dfrac{wA}{g}n^2\right)$，$\varepsilon^4 = \dfrac{wA}{4gEI}n^2$ とおくと，

解は，$Y_1 = \cos S\xi\{A_1 \cosh S\xi + A_2 \sinh S\xi\} + \sin S\xi\{A_3 \cosh S\xi + A_4 \sinh S\xi\}$

$Y_2 = B_1 \cos\varepsilon\xi + B_2 \sin\varepsilon\xi + B_3 \cosh\varepsilon\xi + B_4 \sinh\varepsilon\xi$

(b) 直杭の曲げ基礎微分方程式



$$\begin{cases} \dfrac{wA}{g}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(EI\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}\right) - kDu_1 & \cdots\cdots \text{地中部} \\ \dfrac{wA}{g}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(EI\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2}\right) & \cdots\cdots \text{空中部} \end{cases}$$

$u_1 = U_1 \sin nt,\quad u_2 = U_2 \sin nt$ とおくと.

解は、$U_1 = \cos\delta\eta\{C_1\cosh\delta\eta + C_2\sinh\delta\eta\} + \sin\delta\eta\{C_3\cosh\delta\eta + C_4\sinh\delta\eta\}$

$U_2 = D_1\cos\varepsilon\eta + D_2\sin\varepsilon\eta + D_3\cosh\varepsilon\eta + D_4\sinh\varepsilon\eta$

(c) 斜杭の軸方向基礎微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{wA}{g}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = EA\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} - k_v\pi D x_1 & \cdots\cdots \text{地中部} \\ \dfrac{wA}{g}\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = EA\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial \xi^2} & \cdots\cdots \text{空中部} \end{cases}$$

$x_1 = X_1 \sin nt,\ x_2 = X_2 \sin nt$ とし $\beta^2 = \dfrac{1}{EA}\left(k_v\pi D - \dfrac{wA}{g}n^2\right),\ \gamma^2 = \dfrac{wA}{gEA}n^2$ とおくと.

解は、$X_1 = E_1\cosh\beta\xi + E_2\sinh\beta\xi$

$X_2 = F_1\cos\gamma\xi + F_2\sin\gamma\xi$

未知係数を減ずため、杭下端の境界条件を代入する。即ち、$\xi=0$ に於てモーメント，変位が共に0である。また、$\eta=0$ に於ても同様である。

即ち、$\eta=\xi=0$ に於て、$Y_1 = X_1 = U_1 = 0,\ \dfrac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial U_1}{\partial \eta^2} = 0$ の条件より $A_1 = A_4 = C_1 = C_4 = E_1 = 0$ となる。

以上の式を定数を書き変え整理すると次のようになる。

※地中部の杭の変位式

$$\begin{cases} Y_1 = A_1\cos\delta\xi\sinh\delta\xi + A_2\sin\delta\xi\cosh\delta\xi \\ U_1 = C_1\cos\delta\eta\sinh\delta\eta + C_2\sin\delta\eta\cosh\delta\eta \\ X_1 = E\sinh\beta\xi \end{cases}$$

※空中部の杭の変位式

$$\begin{cases} Y_2 = B_1\cos\varepsilon\xi + B_2\sin\varepsilon\xi + B_3\cosh\varepsilon\xi + B_4\sinh\varepsilon\xi \\ U_2 = D_1\cos\varepsilon\eta + D_2\sin\varepsilon\eta + D_3\cosh\varepsilon\eta + D_4\sinh\varepsilon\eta \\ X_2 = F_1\cos\gamma\xi + F_2\sin\gamma\xi \end{cases}$$

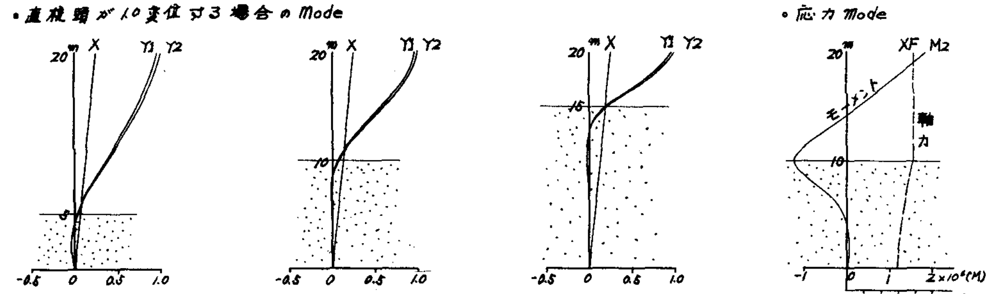
以上の式に境界条件を代入し固有振動数、振動型を求める。境界条件として、頭部に於ては回転角が0である条件、せん断力の釣合いの条件、変位の連続の条件等、また、空中部と地中部の境界層に於いては連続の条件がある。この境界条件より15個の式ができるがこの式のDeterminantをとり、このDeterminant = 0なる点のnが所要の固有円振動数である。各々の値に対する1次の固有円振動数は右表のようになる。

k kg/cm³	2.0			5.0			8.0		
h m	5	10	15	5	10	15	5	10	15
n 1/sec	13.824	14.627	17.287	13.841	14.695	17.762	13.849	14.727	18.006

次にこの固有円振動数を用いて振動型を求めると、下図のようになる。

<k = 5.0 kg/cm³ の場合>　Y1：斜杭横方向振動型　Y2：直杭横方向振動型　X：斜杭軸方向振動型

• 直杭頭が1.0変位する場合のMode　　• 応力Mode



h = 5 m　　h = 10 m　　h = 15 m　　h = 10 m

2-3．地盤が変形する場合の杭の変形曲線

地盤の振動型は次式のように与えられる。

$U_p = C_2 (-1)^{n-1} \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{\eta}{h}$　　なお、$C_2 = 1.0$ とする。

また、固有振動数は $N = \frac{n_m}{2\pi} = \frac{2n-1}{4h} \sqrt{\frac{gG_m}{w_m}}$ で表わされる。

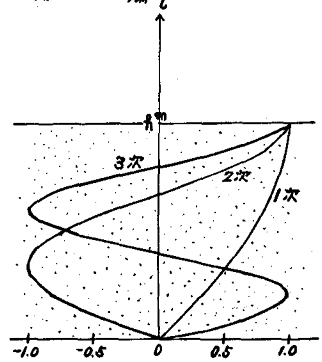
但し、G_m：土のせん断弾性係数　　w_m：土の単位体積重量

地盤が U_p なる静変位を起す時の杭変形及びモーメントは次の式より求まる。

<地盤の振動型 U_p>

$w_m = 1.8 \times 10^{-3}$ kg/cm³

$G_m = 10\,k$ kg/cm² η



(a) 直杭（横方向）

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 u_1}{d\eta^4} = -kD(u_1 - U) & \cdots\cdots \text{地中部} \\ EI \frac{d^4 u_2}{d\eta^4} = 0 & \cdots\cdots \text{空中部} \end{cases}$$

(b) 斜杭（横方向）

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 y_1}{d\xi^4} = -kD(y_1 - U\cos\theta) & \cdots\cdots \text{地中部} \\ EI \frac{d^4 y_2}{d\xi^4} = 0 & \cdots\cdots \text{空中部} \end{cases}$$

(c) 斜杭（軸方向）

$$\begin{cases} EA \frac{d^2 x_1}{d\xi^2} = k_T \pi D(x_1 - U\sin\theta) & \cdots\cdots \text{地中部} \\ EA \frac{d^2 x_2}{d\xi^2} = 0 & \cdots\cdots \text{空中部} \end{cases}$$

[2-2]と同じく境界条件を代入し、$\frac{kD}{4EI} = \alpha^4$, $\frac{2n-1}{2h}\pi = m$, $\frac{k_T \pi D}{EA} = \gamma^2$ とおくと上式の解は次のようになる

＊地中部の杭の変位式

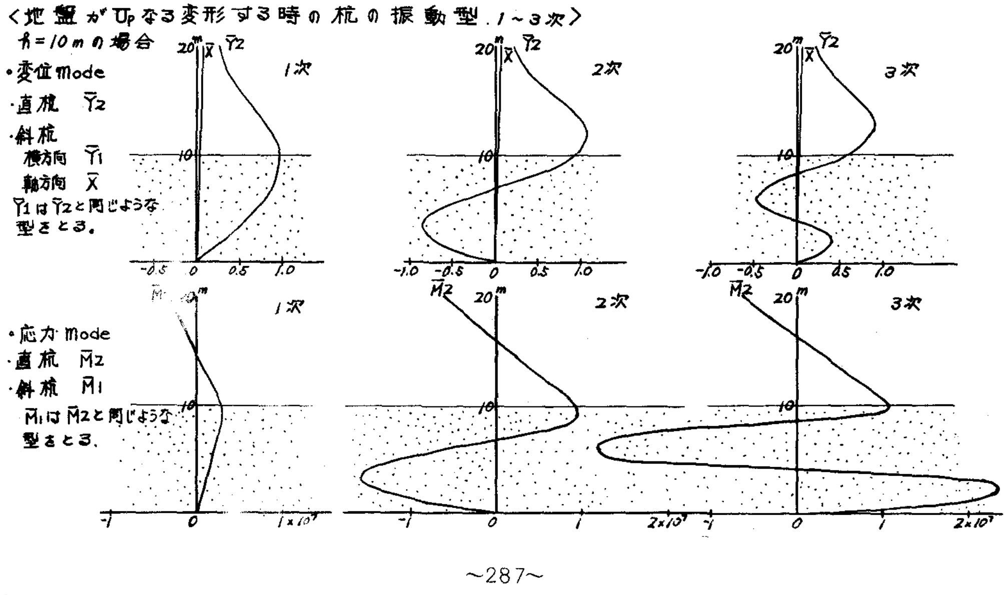
$$\begin{cases} y_1 = A_1 \cos\alpha\xi \sinh\alpha\xi + A_2 \sin\alpha\xi \cosh\alpha\xi + \frac{(-1)^{n-1} 4\alpha^4 \cos\theta}{m^4\cos^4\theta + 4\alpha^4} \sin m\eta \\ x_2 = E \sinh\gamma\xi + \frac{(-1)^{n-1} \gamma^2 \sin\theta}{m^2\cos^2\theta + \gamma^2} \sin m\eta \\ u_1 = C_1 \cos\alpha\eta \sinh\alpha\eta + C_2 \sin\alpha\eta \cosh\alpha\eta + \frac{(-1)^{n-1} 4\alpha^4}{m^4 + 4\alpha^4} \sin m\eta \end{cases}$$

＊空中部の杭の変位式

$$\begin{cases} y_2 = B_1 + B_2\xi + B_3\xi^2 + B_4\xi^3 \\ x_2 = F_1 + F_2\xi \\ u_2 = D_1 + D_2\eta + D_3\eta^2 + D_4\eta^3 \end{cases}$$

上の変位式に頭部、境界面、下端等に於る境界条件を代入し、16個の条件式を求める。更に $n = 1, 2, 3$ 次を代入し、掃出法により未知係数を求めて杭の振動型を求めると次のようになる。

<地盤が U_p なる変形する時の杭の振動型 1～3次>



2-4．応答計算

地盤が変形しない場合の直杭横方向、斜杭横方向、斜杭軸方向の振動型を Y_{2r}, Y_{1r}, X_r とする。

なお、T は杭頭部の振動型で $T_r = 1.0$ とする。

系の全運動エネルギーは直交の条件を満足するように決めると

$$K = \frac{wA}{2g}\int_0^H (\Sigma \dot{a}_r^2 Y_{2r}^2)d\eta + \frac{wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} (\Sigma \dot{a}_r^2 Y_{1r}^2)d\xi + \frac{wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} (\Sigma \dot{a}_r^2 X_r^2)d\xi + \frac{W}{2g}(\Sigma \dot{a}_r^2 T_r^2)$$

また、全歪エネルギーは n_r を r 次の固有円振動数とすると

$$V = \frac{wA}{2g}\int_0^H (\Sigma n_r^2 a_r^2 Y_{2r}^2)d\eta + \frac{wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} (\Sigma n_r^2 a_r^2 Y_{1r}^2)d\xi + \frac{wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} (\Sigma n_r^2 a_r^2 X_r^2)d\xi + \frac{W}{2g}(\Sigma n_r^2 a_r^2 T_r^2)$$

一般力は次の２つの部分から成る。

(i) 地震の加速度による一般力　　　(ii) 地盤変形による一般力

地盤が U_P なる振動型をなす時の杭の静変位を $\overline{Y}_P$ とすると全一般力は

$$Q = -\frac{wA}{g}\ddot{\varphi}\int_0^H Y_{2r}d\eta - \frac{2wA}{g}\ddot{\varphi}\cos\theta\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} Y_{1r}d\xi - \frac{2wA}{g}\ddot{\varphi}\sin\theta\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} X_r d\xi - \frac{W}{g}\ddot{\varphi}T_r$$
$$-\Sigma\frac{wA}{g}\ddot{b}_p\int_0^H \overline{Y}_{2p}Y_{2r}d\eta - \Sigma\frac{2wA}{g}\ddot{b}_p\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta}\overline{Y}_{1p}Y_{1r}d\xi - \Sigma\frac{2wA}{g}\ddot{b}_p\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta}\overline{X}_p X_r d\xi - \Sigma\frac{W}{g}\ddot{b}_p\overline{T}_p T_r$$

以上の式を Lagrange の運動方程式に代入して最終的に応答式は次のようになる。

$$\ddot{a}_r + 2h_r n_r \dot{a}_r + n_r^2 a_r = -\frac{1}{{}_0M_r}\left\{{}_1M_r\ddot{\varphi} + \Sigma\ddot{b}_p\overline{M}_{pr}\right\}$$

$\ddot{b}_p$ は地盤の運動方程式より次のように表わされる。

$$\ddot{b}_p + 2h_p n_p \dot{b}_p + n_p^2 b_p = -\beta_p\ddot{\varphi}$$

但し、
$$\beta_p = \frac{\int_0^H U_p d\eta}{\int_0^H U_p^2 d\eta}$$

β_1	β_2	β_3
1.27324	-0.42441	0.25465

＜刺激係数 β_p の値＞

$${}_0M_r = \frac{wA}{g}\int_0^H Y_{2r}^2 d\eta + \frac{2wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} Y_{1r}^2 d\xi + \frac{2wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta} X_r^2 d\xi + \frac{W}{g}T_r^2$$
$${}_1M_r = \frac{wA}{g}\int_0^H Y_{2r}d\eta + \frac{2wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta}\cos\theta\cdot Y_{1r}d\xi + \frac{2wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta}\sin\theta\cdot X_r d\xi + \frac{W}{g}T_r$$
$$\overline{M}_{pr} = \frac{wA}{g}\int_0^H \overline{Y}_{2p}\cdot Y_{2r}d\eta + \frac{2wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta}\overline{Y}_{1p}\cdot Y_{1r}d\xi + \frac{2wA}{g}\int_0^{H\,\mathrm{ARC}\theta}\overline{X}_p\cdot X_r d\xi + \frac{W}{g}\overline{T}_p T_r$$

$\ddot{\varphi}$ としては既往の EL CENTRO 地震波を入れ応答計算を試みた。

右図は EL CENTRO 地震波５秒間の杭頭の応答例。

$y = a_1Y_1 + \sum_{P=1}^{3} b_P\overline{Y}_P$　＜地盤変形を考慮した場合＞

$y' = g_1Y_1$　　　＜地盤変形を考慮しない場合＞

但し、g_1 は考慮しない場合の一般座標である。

３．結　論

右図は直杭頭の変位応答例であるが、杭の地中深さが５ｍの浅い杭では地盤変形の影響は少く杭の自由振動に左右される。また、地中深さ１５ｍの深い杭では地盤変形の影響が大きく、ほとんどこの影響に左右され、その変位も大きくなるのでこの影響を考慮すべきである。なお、地中深さが杭の半分である１０ｍの場合、地盤変形による影響が安全側に作用し、地盤変形を考慮しない杭の変位の方が大きくなったがこの原因は目下検討中である。

＜EL CENTRO 地震波に対する応答＞