

Ⅲ-15

長方形浸透領域内の未満水暗きょの取水量について

九州大学工学部 正員 上田年比古
全 正員 〇杉尾 哲

1. まえがき

本報は水平な上面が湛水で被われている均一な透水性をもつ長方形浸透領域内に円形暗きょがあり円形暗きょの内部が水で満たされていない場合（以下未満水円形暗きょという）の暗きょ取水量について、近似的に解析し、その解析結果が砂モデルによる実験結果とほぼよい一致を示すことをのべたものである。以下においては、まず領域の簡単な場合として、半無限領域における未満水暗きょの取水量¹⁾についてのべ、次いで半無限領域を長方形領域に写像して、長方形領域内の未満水暗きょの取水量およびその実験結果についてのべることにしよう。

2. 基礎式

図-1の浸透領域における速度ポテンシャルを Φ とおくと、

Darcyの法則より

$$\Phi = kH = k \{ (P_w) - x \} \quad (1)$$

ここに k は浸透領域内の土壌の透水係数、 H は浸透領域内の任意点 x の全水頭、 P はその点の圧力である。

次に図-1に示す半無限領域において、暗きょ内が満水($h=2r$ 、ここに h は暗きょ内水深、 r は暗きょ半径)の場合には暗きょ周壁は等ポテンシャル線である。したがって、この浸透流は y 軸と暗きょ周壁で与えられる一つの円形等ポテンシャル線との間のPotential Flowで、これは図-2のように暗きょ内の一点($x=a, y=0$)に流入点をもち y 軸に対して対称な位置($x=-a, y=0$)に流出点をもつPotential Flowと等しくなる。この複素ポテンシャルは

$$W = C_1 \cdot \ln \{ (z-a)/(z+a) \} + C_2 \quad (2)$$

$$W = \Phi + i\psi, \quad z = x + iy$$

ここに C_1, C_2 は実定数である。

また式-2を解析して求めた満水状態の半無限領域内の円形暗きょ取水量 Q と流入点の位置 a の算定式は

$$Q = 2\pi k \cdot H / \ln \{ (d + \sqrt{d^2 - r^2}) / r \} \quad (3)$$

$$a = \sqrt{d^2 - r^2} \quad (4)$$

ここに ΔH は暗きょ内 C 点と自由面との水頭差で、暗きょ中心の圧力を P_0 とすれば $\Delta H = H_0 + d - (P_w)$ で表わされる。

3. 半無限領域の未満水円形暗きょの取水量

3-1 近似的解析の考え方

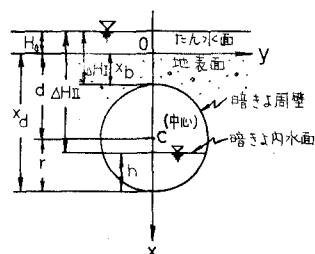


図-1 半無限領域の流れの場合
(その1)

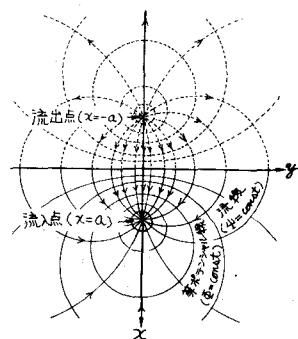


図-2 満水状態の流線網

図-1に示すように暗きょ内に水深 h の水がある場合の暗きょへの流入を考えてみよう。まず暗きょ周壁の圧力分布は $\widehat{EBF}$ 間で大気圧に等しく、 $\widehat{EDF}$ 間では暗きょ内水深による静水圧分布をなす。したがって式-1より $\widehat{EBF}$ 間では

$$\Phi = k \{ (R/w) - x \} = -kx \quad (R: \text{大気圧で} 0)$$

となって深さ方向に減少し、 $\widehat{EDF}$ 間では

$$\Phi = k \{ h - x_d \} \quad (x_d: D \text{ 点の } x \text{ 座標})$$

の等ポテンシャルとなる。すなわち満水状態の円形暗きょの場合と違って暗きょ周壁は等ポテンシャル線とはならず、この場合の浸透流は図-2に示すものと異ってくる。このような円形暗きょ周壁のポテンシャル分布に対する流れの厳密解を求めることは困難であると考えられ、ここでは次にのべる考えのもとに近似解を求めることにした。

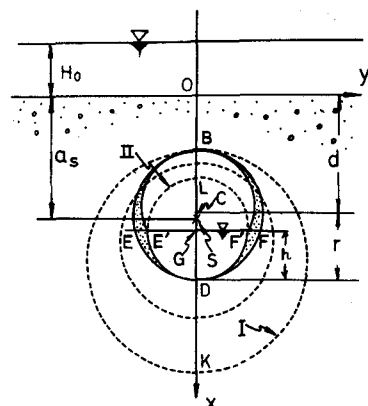


図-3 半無限領域の流れの場合 (その2)

(Sは点線で示す等ポテンシャル円群の流入点、円BDは与えられた円形暗きょ、Cはその中心)

図-3の点線の円群は図-2の浸透流の等ポテンシャル円群

と同じものとする。また円BEDFは与えられた暗きょ (図-1の円BD) である。いま図-3において円BDの暗きょ周壁と同じ深さで同じ速度ポテンシャルをもつ等ポテンシャル円群上の点をとって結んだものを $\widehat{BEDF}$ とする。すなわち $\widehat{EDF}$ 間は等ポテンシャルであるから $\widehat{EDF}$ はD点を通る点線の等ポテンシャル線にそい、 $\widehat{BE}$ 間はポテンシャルが深さ方向に減少するので $\widehat{BE}$ のようになるであろう。このように、 $\widehat{BEDF}$ は図-2の浸透領域内のポテンシャルと同じ値をもつ閉曲線であり、したがって $\widehat{BEDF}$ に対する流れは図-2の浸透流の流れと等しくなる。本解析では円BDへの流入量すなわち求める取水量を近似的に $\widehat{BEDF}$ への流入量に等しいとしてこの流入量を算定するものである。いまこの算定誤差すなわち円BDの流入量と $\widehat{BEDF}$ の流入量の差を考えると、 $\widehat{BEDF}$ は円BDの中に図-3の点々の部分だけ余分に助がつまっていることから、 $\widehat{BEDF}$ への流入量は円BDのそれよりやや少なめの量を与えることが推察される。

3-2 解析

図-3の $\widehat{BEDF}$ に対する浸透流すなわちSを流入点とする半無限領域内の浸透流 (図-2の流れ) について考えると、浸透領域内の流れは流入点Sに集中するので、連続の条件からこの浸透領域内のSを含む任意の閉曲線に流入する流量はすべて等しい。ここに $\widehat{BEDF}$ は流入点Sを含む閉曲線であるから、その流入量すなわち取水量は図-3の点線で示すどの等ポテンシャル線に対する流入量とも等しくなる。したがってB点を通る等ポテンシャル線・円BK (図-3のI) あるいはD点を通る等ポテンシャル線・円DL (図-3のII) に対する流入量を求めればよい。I, IIの等ポテンシャル線の半径をそれぞれ r_I , r_{II} , 中心の位置を d_I , d_{II} とすれば、この流入量 Q_N と流入点の位置 a_s は式-3,4より

$$\left\{ \begin{aligned} (Q_N / 2\pi k) \Delta H_I / \ln \{ (d_I + \sqrt{d_I^2 - r_I^2}) / r_I \} &= \Delta H_{II} / \ln \{ (d_{II} + \sqrt{d_{II}^2 - r_{II}^2}) / r_{II} \} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (a_s) \sqrt{d_I^2 - r_I^2} &= \sqrt{d_{II}^2 - r_{II}^2} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (x_b) d_I - r_I &= d - r \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$(x_d =) d_{II} + r_{II} = d + r \quad (8)$$

ここに ΔH_I および ΔH_{II} は地表面と I および II の等ポテンシャル線との水頭差であり、
 $\Delta H_I = H_0 + d - r$, $\Delta H_{II} = H_0 + d + r - h$ 。

したがって、式-5~8を連立に解いて d_I , d_{II} , r_I および r_{II} を求めれば、式-5のオ-式より目的の Q_N をうる。すなわち式-5~8は未満水円形暗きょの取水量算定式である。

4. 長方形領域の未満水円形暗きょの取水量

次に、長方形領域内にある未満水暗きょの取水量を求めてみよう。まず Jacobi の楕円関数の一つ sn 関数を用いて、

図-1の半無限領域を長方形領域に等角写像する関数は、

$$C_3 Z = \text{sn}\{K(m)z/H, m\} \quad (9)$$

となる。ここに、 C_3 は実定数、 m は sn 関数の母数で、 $K(m)$ はオ-種完全楕円積分である。なお m の値は、長方形領域の縦横の長さの比 $L/H = K(m)/K(m)$ となることから、オ-種完全楕円積分表より求めることができる。

さて、与えられた長方形領域を図-4とし、与えられた円形暗きょを円 Br 、水面を F_0Gr とする。

いま図-3の半無限領域内の BFD , $F'Gr$, I, および II が、

写像関数式-9により写像されてそれぞれ図-5の Br , F_r , Gr , I_r および II_r になるとする。前述のように式-5~8は図-3に示す水面が $G'F'$ の閉曲線 $B'F'D'E'B'$ に対する取水量を求める式であるからこれらを式-9により写像変換した

$$\left\{ \begin{aligned} (Q_N/2\pi k) \Delta H_{II} / \ln\{(d_I + \sqrt{d_I^2 - r_I^2})/r_I\} &= \Delta H_{II} / \ln\{(d_{II} + \sqrt{d_{II}^2 - r_{II}^2})/r_{II}\} \quad (10) \\ \sqrt{d_I^2 - r_I^2} &= \sqrt{d_{II}^2 - r_{II}^2} \quad (11) \\ C_3 \cdot (d_I - r_I) &= C_3 \cdot (d - r) = \text{sn}\{K(m)(D - R)/H, m\} \quad (12) \\ C_3 \cdot (d_I + r_I) &= C_3 \cdot (d + r) = \text{sn}\{K(m)(D + R)/H, m\} \quad (13) \end{aligned} \right.$$

は図-4の水面が Gr F_r の閉曲線 Br F_r D_r E_r Br に対する取水量を求める式となる。

ここに $\Delta H_{II} = H_0 + D - R$, $\Delta H_{II} = H_0 + D + R - h_r$ である。

なお、式-12,13の定数 C_3 は式-10に d_I , d_{II} , r_I および r_{II} を代入すると分子、分母で相殺され暗きょ取水量とは無関係となる。さて所要の取水量は図-4に示す水面が Gr F_0 の円形暗きょ Br F_0 D_r E_r に対するものであるから式-10~13による取水量は図-5の点々で示した部分に砂がつまっているだけ所要の取水量より少なく算定されるものと考えられる。この点々の部分の大きさは作図によると、半無限領域における未満水暗きょの場合(図-3の点々の部分)と同様に $\overline{GrD_r} / \overline{BrD_r} \approx 0.7$ 付近で最も大きくなるようである。

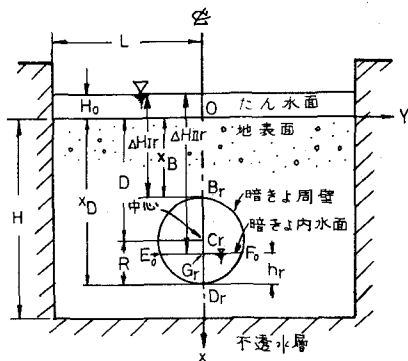


図-4 長方形領域の流れの場合 (その1)

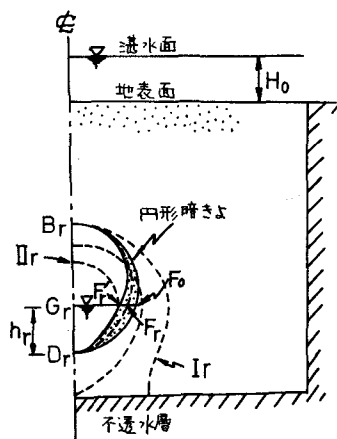


図-5 長方形領域の流れの場合 (その2)

しかしこの点々の部分の面積は比較的小さいので、式-10~13は長方形領域内の未満水暗きょの取水量算定式としてほぼよい値を示すものと考えられる。

5. 実験による検討

図-6のような暗きょ内水位を自由にかえるようにした砂モデル実験装置で $R/H=0.1$, $D/H=0.5$, $H=20\text{cm}$ の場合について、 $L/H=0.5, 1.0$ および 2.0 の浸透領域における浸透流量 Q を測定し、これと式-10~13による長方形領域の解析結果とを検討した。なお透水係数は被圧暗きょの状態の測定流量を、長方形領域の取水量算定式²⁾に代入して求めた値を用いたが、実験砂の締め固めの程度で異なり、 $k=0.27\sim0.34\text{ cm}^2/\text{sec}$ の値を得た。これらの測定結果の $Q/(k \cdot \Delta H_{lr})$ を $\Delta H_{lr}/\Delta H_{lr}$ に対して Plot すると図-7のようになる。

これによると前述のように本解析結果はやや少なめの値を与えるものと推定されたが実験結果にもその傾向が表われていて、またその誤差は前述のように半無限領域の場合と同じ、 $h_r/2R=0.7$ 付近が大きいようである。またこの場合の各浸透領域における解析誤差の最大値は、 $L/H=1/2$ のときは 5.4% , $L/H=1.0$ のときは 4.1% , $L/H=2.0$ のときは 3.85% となり半無限領域の場合の 2.5% と比べてやや大きな値を生じた。なお全般的にみて、実験結果と本解析結果とはほぼよい一致を示しているといえよう。

なお、横軸において $\Delta H_{lr}/\Delta H_{lr} = 1.0$ の場合が満水状態 ($h_r=2R$) で、 $0.75\sim0.76$ [この値は H_0 の値によって変化する] の場合ががらの状態 ($h_r=0$) である。

さて従来は、このような未満水暗きょの取水量の算定には、暗きょ周壁上端とか暗きょ中心点の圧力が大気圧の水で満たされていると考えて、被圧円形暗きょの式によって算定しているようである。

しかし、この場合、未満水状態の円形暗きょの周壁は前述のように等ポテンシャル線とははうないので算定誤差が生ずる。これを参考のために図-7の点線、一点鎖線で示している。

終りに、実験および整理にご協力頂いた李工学部職員・谷一義氏、水工土木学科4年・有田建男君、大塚忠世君に感謝します。

- 参考文献 1) “水で満たされていない集水暗きょの取水量について” 第13回水理講演会要録集 昭和44年2月
2) “長方形浸透領域内の集水暗きょの取水量” 第19回全国水道研究発表会講演集 昭和43年5月

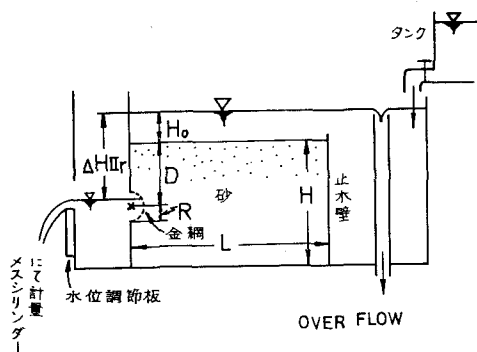


図-6 実験装置

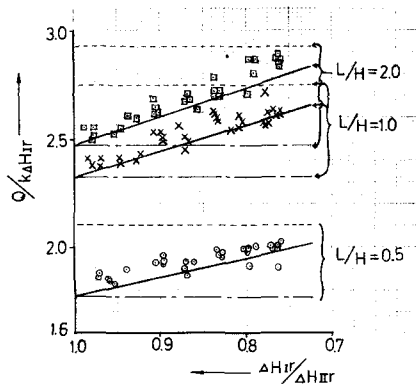


図-7 長方形領域の実験結果

- 暗きょ中心の圧力を大気圧
- · - - 暗きょ上端の圧力を大気圧
—— 式-10~13による算定結果
○ × □ 各領域の実験結果