

III-14

複合断面浸透領域内の暗きょ排水量について

九州大学工学部 正 員 上田年比古
全 正 員 杉尾 哲
全 O学生員 有田 建男

1. まえがき

本報は排水問題によくみられる図-1に示すような帯状に水平に広がった浸透領域の底部の不透水層の一部にはられた長方形のみぞの部分(以上の断面をここでは複合断面とよんだ)に、円形暗きょが埋設され、領域上面は湛水で被われ、暗きょ内は水で満たされている場合の暗きょ排水量(または取水量)の算定についてのべたものである。

この場合の解析手段として、等角写像の繰返しにより、与えられた複合断面の浸透領域を簡単な領域に変換して、暗きょ排水量を求める方法と、複合断面の帯状に長い領域とみぞ状の長方形領域に分けて、おのおのの浸透流量式を複素ポテンシャル理論より導き、両者の流量が等しい条件より暗きょ排水量を求める方法とがある。

オ-の等角写像の繰返しによる算定方法はかなり複雑であり、現場での使用は困難と考えられる。

したがってオニの方法による算定結果の近似の程度がよければより簡単に算定できることになる。

ここではこの二つの算定法による結果を比較検討した。

2. 等角写像の繰返しによる排水量の算定

図-1の流れの場を平面を、図-2に示す上半面に等角写像する写像関数は Schwarz-Christoffel の変換より

$$Z = M \int_0^{\xi} \frac{(1-m^2\zeta^2)^{1/2}}{(1-\zeta^2)^{3/2}} \frac{d\zeta}{1-m^2 \sin^2 \alpha \zeta^2} \quad (1)$$

ここに m は母数であり、 M, α は実定数とする

ここで Jacobi の楕円関数の一つ $\sin$ 関数を用いて、この ζ 平面の上半面を長方形領域内に等角写像すると図-3がえられる。

$$\zeta = \sin(W_1, m) \quad (2)$$

この図-3の長方形領域内に円形暗きょがある場合の暗きょ排水量の算定式はすでに誘導されている。

したがって、流れの場を平面を(1),(2)式の写像関数で W_1 平面に等角写像すれば、 W_1 平面における暗きょ排水量が求められる。

(2)式を(1)式に代入すると

$$Z = M \int_0^1 \frac{1-m^2 \sin^2 W_1}{1-m^2 \sin^2 \alpha \sin^2 W_1} dW_1$$

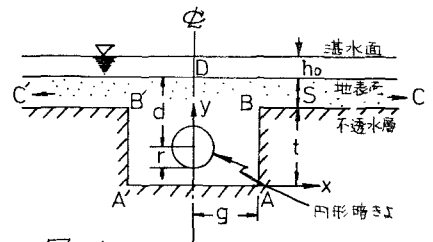


図-1 流れの場 (Z 平面)

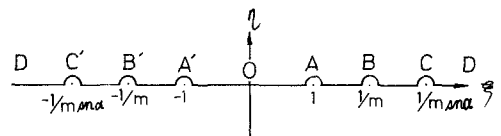


図-2 ζ 平面 ($\zeta = \xi + i\eta$)

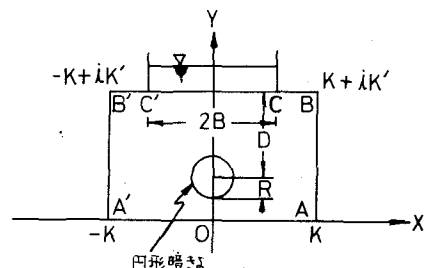


図-3 W_1 平面 ($W_1 = X + iY$)

したがって
$$Z = M \left[W_1 - \frac{cn\alpha}{sn\alpha dn\alpha} \Pi(W_1, \alpha, m) \right] \text{-----}(3)$$

ここに $\Pi(W_1, \alpha, m)$ は第一種楕円積分で、

$$\Pi(W_1, \alpha, m) \equiv m^2 sn\alpha cn\alpha dn\alpha \int_0^{W_1} \frac{sn^2 W_1}{1 + m^2 sn\alpha dn^2 W_1} dW_1$$

ここで α , M を求めてみよう。

いま、 xy 平面の S の長さは K , K' をそれぞれ母数 m , m' の第一種完全楕円積分とすると、

虚軸に沿う OD の長さ
$$g + it = M \left[K' + \frac{cn\alpha}{sn\alpha dn\alpha} \left\{ \frac{\pi}{2} - K'Z(\alpha) - \frac{\pi\alpha}{2K} \right\} \right]$$

$\overline{AB}$ の長さ

$$t = M \left[K' - \frac{cn\alpha}{sn\alpha dn\alpha} \left\{ K'Z(\alpha) + \frac{\pi\alpha}{2K} \right\} \right]$$

$$\therefore S = M \frac{\pi}{2} \frac{cn\alpha}{sn\alpha dn\alpha} \text{-----}(4)$$

ここに $Z(\alpha)$ は Jacobi のジータ関数である。また B 点について考えると(3)式より

$$g + it = M \left[K + iK' - (cn\alpha/sn\alpha dn\alpha) \Pi(K + iK', \alpha, m) \right] \text{-----}(5)$$

ここに $\Pi(K + iK', \alpha, m) \equiv (K + iK')Z(\alpha) + i\pi\alpha/2K$

$$\therefore \frac{g}{S} = \frac{2}{\pi} K \left[\frac{sn\alpha dn\alpha}{cn\alpha} - Z(\alpha) \right] \text{-----}(6)$$

$$\frac{t}{S} = \frac{2}{\pi} K' \left[\frac{sn\alpha dn\alpha}{cn\alpha} - Z(\alpha) \right] - \frac{\alpha}{K} \text{-----}(7)$$

したがって(6)式(7)式を同時に満足する m , α の値を求めればよい。ここに(6)式を(7)式に代入すると

$$\alpha = (gK' - tK)/S \text{-----}(8)$$

であり、まず m の値を仮定し、第一種完全楕円積分表により K, K' の値を読み取って(8)式より α を求め、これを(6)式に代入して K の値を算定する。さらにこれらの値を(7)式に代入すれば K が求まる。

以上の計算を繰返し、 m , α の値が定まれば M の値は(5)式の実数部分を変形した次式から算定できる。

$$M = \frac{g}{K \left[1 - (cn\alpha/sn\alpha dn\alpha) Z(\alpha) \right]} \text{-----}(9)$$

さらに W_1 平面における有限流入部の長さ $2B$ は(2)式の逆関数 $F(\zeta, m)$ すなわち第一種楕円積分において $1/mu = \zeta$ とおけば

$$(\overline{BC})_{W_1} = \int_{1/m}^{1/mu} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{1-m^2\zeta^2}} = \int_{mu}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-m^2u^2)}} = K - F(sn\alpha, m)$$

したがって $(\overline{BC})_{W_1} = B = F(sn\alpha, m) \text{-----}(10)$

と与えられる。また、前に母数 m の値を用いて第一種完全楕円積分表より読み取り、 K, K' の値は W_1 平面の縦横の長さである。次に xy 平面の暗きよに対応する W_1 平面の暗きよの半径 R および地表面からの深さ D を(3)式から求める。

ここに(3)式において $W_1 = iU$ とおくと

$$\Pi(iU, \alpha, k) = \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(iU - \alpha)}{\Theta(iU + \alpha)} + iU Z(\alpha) = i \left[\tan^{-1} \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \frac{n\pi U}{K} \sinh \frac{n\pi \alpha}{K}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos \frac{n\pi U}{K} \cosh \frac{n\pi \alpha}{K}}}{1} + U Z(\alpha) \right]$$

ここに $\Theta(iU \pm \alpha)$ は Jacobi のシータ関数で $\Theta(v) = \vartheta_3(\frac{v}{2K}/\frac{iK}{K}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{n^2} \cos(n\pi v/K)$

また $Z(\alpha) = E(\alpha) - E \cdot \alpha / K$ $E(\alpha)$ は α = 種楕円積分, E は α = 種完全楕円積分

であるから Z 平面内の虚軸上の長さとは z 平面内の虚軸上の長さとの関係をグラフ化すれば z 平面の d および r に対応する Z 平面の D および R が求まるであろう。

以上により Z 平面の境界の形状はすべて決定されたことになり、これらの値を次式に代入すれば、 Z 平面したがって z 平面の暗きよの排水量が求まる。

$$\frac{Q}{k\Delta H} = 2\pi / \ln \frac{\sqrt{\sin^2(D+R, m_1') \sqrt{\Delta C^2(B, m_1) + \Delta n^2(D-R, m_1')} + \sqrt{\sin^2(D-R, m_1') \sqrt{\Delta C^2(B, m_1) + \Delta n^2(D+R, m_1')}}}{\sqrt{\sin^2(D+R, m_1') \sqrt{\Delta C^2(B, m_1) + \Delta n^2(D-R, m_1')} - \sqrt{\sin^2(D-R, m_1') \sqrt{\Delta C^2(B, m_1) + \Delta n^2(D+R, m_1')}}} \quad (11)$$

ここに ΔH は地表面と暗きよ内の水頭差であり、 $\Delta H = h_0 + d - (p_0 / \rho g)$; p_0 は暗きよ内圧力

3. 近似的算定法

以上の暗きよ排水量の算定方法は非常に複雑であり、以下に近似的算定法を考えてみよう。

図-1 の流れの場において、上部の帯状に無限に広い領域と下部の長方形領域との境界面が等ポテンシャル線であれば、上部と下部の二つの独立した浸透領域内の流れとして考えることができる。

いまこの境界面が等ポテンシャル線であるとみなして解析してみる。

○ オイ層

図-4 に示すオイ層を z 平面の上半面に等角写像する写像関数は Schwarz-Christoffel の変換より

$$\zeta = N \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{\pi z}{2S}, 1\right) = N \tanh \frac{\pi z}{2S} \quad (12)$$

B 点について考えると $\zeta = 1$ $z = g$ であるから

$$N = 1 / \tanh(\pi g / 2S)$$

したがって写像関数は $\zeta = \frac{\tanh(\pi z / 2S)}{\tanh(\pi g / 2S)} \quad (13)$

次に z 平面の上半面を W 平面に等角写像する写像関数も(12)式と同様に

$$\zeta = \operatorname{sn}(iK_1 W / \Delta \Phi, m_1)$$

ここに m_1 は sn 関数の母数から平面における C 点の値の逆数であるから $m_1 = \tanh(\pi g / 2S)$ 。また K_1 , K はそれぞれ m_1 , m_1 のオ一種完全楕円積分。いま B 点について考えると $\zeta = 1$, $W = -i\psi_1$ したがって $(K_1 / \Delta \Phi) \psi_1 = K_1$ 。
 $\psi_1 + \psi_2$ がオイ層の $\overline{BB}$ に流入する浸透流量を表わし、
 $\psi_1 = \psi_2$ であるから $Q = 2\psi_1$ となる。またオイ層の湛水面と $\overline{BB}$ との水頭差を ΔH_1 とすると

$\Delta \Phi_1 = k \Delta H_1$ である。したがって

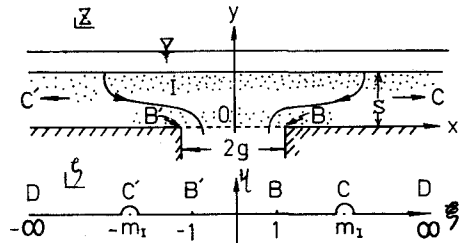


図-4 オイ層とその z 平面, W 平面

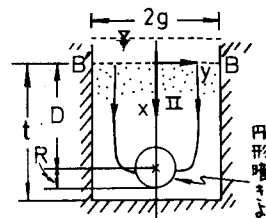


図-5 オイ層の長方形領域

$$\frac{Q_1}{k\Delta H} = \frac{2\phi_1}{\Delta\phi_1} = \frac{2K_1}{K_1} \quad \text{----- (14)}$$

○ 才Ⅱ層

図-5に示す才Ⅱ層の円形暗きょに流入する浸透流量の算定式はすでに次式のように求められている。したがってBと暗きょとの間の水頭差を ΔH_2 とすれば

$$\frac{Q_2}{k\Delta H_2} = 2\pi / \ln \frac{\sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D+R), m\right\}} + \sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D-R), m\right\}}}{\sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D+R), m\right\}} - \sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D-R), m\right\}}} \quad \text{----- (15)}$$

○ 暗きょ排水量の算定式

求める暗きょ排水量を Q とおくと連続の条件より $Q = Q_1 = Q_2$ ----- (16)

また暗きょ湛水との水頭差を ΔH とすれば $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$ ----- (17)

であるから、(16)式に(14)、(15)式を代入し(17)式を用いて整理すると

$$\frac{Q}{k\Delta H} = 2\pi \left(\frac{\pi K'}{K} + \ln \frac{\sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D+R), m\right\}} + \sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D-R), m\right\}}}{\sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D+R), m\right\}} - \sqrt{M\left\{\frac{K}{t}(D-R), m\right\}}} \right) \quad \text{----- (18)}$$

となる。この(18)式が暗きょ排水量の近似的な算定式である。

4. 写像の繰り返し

まず才Ⅰ層と才Ⅱ層との境界面のポテンシャル分布について検討してみよう。いま $r=s=g$, $d+r=t+s$, $2r/d=a$ の場合の等ポテンシャル線を電気モデルによって描くと図-6のようになり、境界面付近のポテンシャル線はゆるやかな山形になっていることがわかる。一般に、この程度のゆるやかなポテンシャル分布であれば(18)式の算定結果は(11)式の算定結果とほぼよく似た値を示すことが推察される。しかし境界面付近の等ポテンシャル線形状は t/g が小さくなるにつれて円に近づいてゆくの、それと同時に(11)式と(18)式との算定誤差はしだいに大きくなると考えられる。

つぎに、排水暗きょが不透水層上にある場合について各 g/t における(11)、(18)式の算定結果を比較してみよう。図-7に(11)式の算定結果を実線で、(18)式の算定結果を破線で示している。これによると、両者は $t=s=S=3$ の場合にかなりの精度で一致し、上記のように g/t が小さくなるにつれて算定誤差が大きくなる傾向を示している。計算例が少ないため、以上の結果だけから結論を下すことはできないが、少なくとも排水暗きょが不透水層上にあり、 $1 \leq g/t \leq 2$ の浸透領域の場合には、(11)式と(18)式による算定結果はほぼよい一致を示すと言えよう。

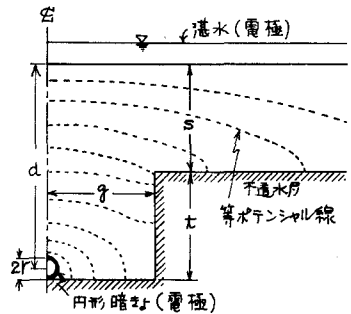


図-6 等ポテンシャル線図

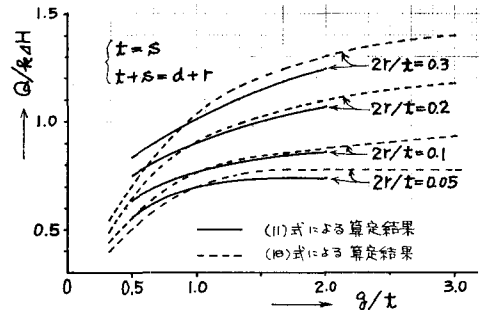


図-7 算定結果の比較