

九州大学工学部 正 員 上田年比古
全 正 員 杉尾 哲
全 学生員 ○幸島勝彦

1. まえがき

一般に複数の流入部あるいは流出部を持つ浸透流は、たとえば、一つの堤防の下の浸透流のような流入、流出部がそれぞれ水一箇所ある流れとは異なり流入部と流入部あるいは流出部と流出部との間に滞り点 (stagnation point) が生じ、この滞り点にいたる流れを境にして複数の独立した流れが組み合わされた流れとなる。また、この滞り点の位置は、流入、流出部の水位によって変動し、これにより流れの場の水速も大きく変化することが知られている。

本報は、複数の流入、流出部をもつ浸透流を、上面に2つの堤防があり、それ以外の上面は湛水で被われている均一な透水性をもつ半無限浸透領域について考之、Jacobiの楕円関数を用いて理論的に解析したものである。

2. 写像関数

流れの場をZ平面、ポテンシャルの場をW平面とし、その媒介平面としてS平面、W₁平面を図-2のように選ぶ。なおW平面は滞り点 (E点) の位置によって図-1のよゝに異なった図形となる。

ここでZ平面とS平面との写像関数を求めると次のようになる。Z平面のB、DおよびF点をS平面のB、DおよびF点に対応させるための双一次変換式は、

$$\frac{(1/k+1)(1/k+5)}{(1/k+5)(1/k-1)} = \frac{\{a+d\}+e\{e+c-z\}}{\{a+d\}+iz} \cdot C \quad (1)$$

したがって、 $z=0$ 、 $s=0$ を満足する条件より

$$(1+k)(a+d)c = (1-k)(a+b)(e+c) \quad (2)$$

また、 $d=b-e$ を用いて

$$e = \frac{2kc(a+b)}{(1-k)(a+b+c)+2kc} \quad (3)$$

この③式によってZ平面の座標がきまる。

次にS平面とW平面との写像関数は

Schwarz-Christoffelの変換より

$$W = C_1 \int \frac{k(s-\xi_e)}{(1-s^2)(1-k^2s^2)} ds \quad (4)$$

ここに ξ_e は滞り点のs軸上の座標で、 C_1 は実定数とする。

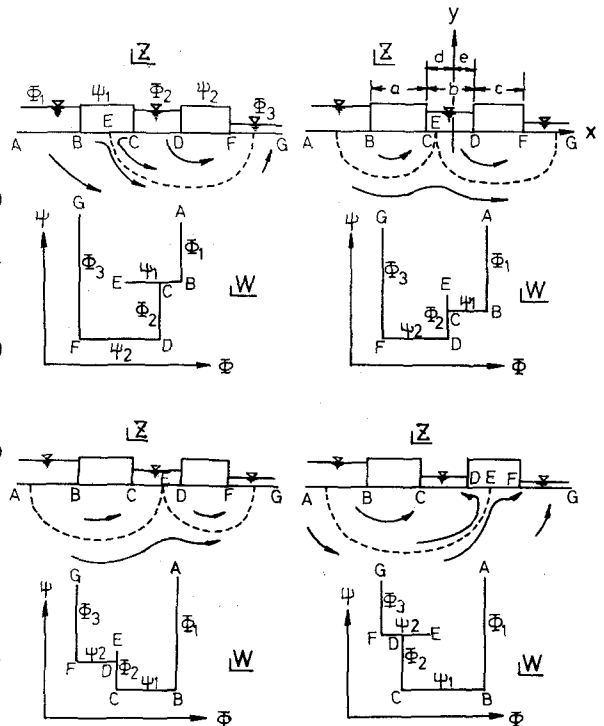


図-1 流れの場とそのポテンシャルの場

また z 平面と w 平面との写像関数はオノ種積分の逆関数; Jacobi の sn 関数を使って
 $z = \operatorname{sn}(w, k) \cdots (5)$ で表わされるが (4) 式に (5) 式を代入すると次のようになる。

$$w = k c_1 \int \{ \operatorname{sn}(w_1, k) - \xi_e \} dw_1 \\ = c_1 \ln \{ \operatorname{dn}(w_1, k) - k \operatorname{cn}(w_1, k) \} - k c_1 \xi_e w_1 + C_2 \quad \cdots (6)$$

ここに C_2 は実定数とする。

なお w 平面の点数は (1) 式が $z = -d$ のとき $z = -1$ を満足する条件より

$$k = \{ \sqrt{(a+b)(b+c)/ac} - 1 \} / \{ \sqrt{(a+b)(b+c)/ac} + 1 \} \quad \cdots (7)$$

ここで (6) 式の c_1, C_2 および ξ_e は未知数であり z 平面と w 平面との対応によってこれらの算定式を誘導してみよう。

B 点では $w_1 = -K + iK', \operatorname{dn}(w_1, k) = 0, \operatorname{cn}(w_1, k) = ik'/k$

$$\Re_1 + i\Im_1 = c_1 \ln(-ik') - k c_1 \xi_e (-K + iK') + C_2 \quad \cdots (8)$$

C 点では $w_1 = -K, \operatorname{dn}(w_1, k) = k', \operatorname{cn}(w_1, k) = 0$

$$\Re_2 + i\Im_2 = c_1 \ln k' + k c_1 \xi_e K + C_2 \quad \cdots (9)$$

D 点では $w_1 = K, \operatorname{dn}(w_1, k) = k', \operatorname{cn}(w_1, k) = 0$

$$\Re_3 + i\Im_3 = c_1 \ln k' - k c_1 \xi_e K + C_2 \quad \cdots (10)$$

F 点では $w_1 = K + iK', \operatorname{dn}(w_1, k) = 0, \operatorname{cn}(w_1, k) = -ik'/k$

$$\Re_4 + i\Im_4 = c_1 \ln(ik') - k c_1 \xi_e (K + iK') + C_2 \quad \cdots (11)$$

$$\text{したがって (8)-(11) より } c_1 = (\Re_2 - \Re_1) / \{ \ln(i) + i k K' \xi_e \} \quad \cdots (12)$$

$$\text{(11)-(10) より } \xi_e = \{ c_1 \ln(i) - (\Re_3 - \Re_2) \} / c_1 k i K' \quad \cdots (13)$$

(13) 式を (12) 式に代入すると

$$c_1 = (\Delta \Re_1 + \Delta \Re_2) / (2n+1) \pi i \quad (n \text{ は } 0 \text{ または整数}) \quad \cdots (14)$$

$$\text{ここに } \ln(i) = (2n+1) \pi i / 2, \quad \Delta \Re_1 = \Re_2 - \Re_1, \quad \Delta \Re_2 = \Re_3 - \Re_2$$

したがって (13) 式を (12) 式に代入して

$$k = \{ (\Delta \Re_1 - \Delta \Re_2) (2n+1) \pi \} / \{ 2 (\Delta \Re_1 + \Delta \Re_2) k K' \} \quad \cdots (15)$$

また (14) (15) 式を (9) 式に代入すると

$$C_2 = \Re_2 + i\Im_2 - (\Delta \Re_1 + \Delta \Re_2) \ln k' / \{ (2n+1) \pi i \} - (\Delta \Re_1 - \Delta \Re_2) (K/K') / 2i \quad \cdots (16)$$

以上で c_1, C_2, ξ_e が求まった。

一方 w_1 は複素数であり (6) 式を実数部、虚数部に分割するために

$$G = \ln \{ \operatorname{dn}(w_1, k) - k \operatorname{cn}(w_1, k) \} = \ln(A/C + iB/C)$$

とおくと

$$G = 1/2 \{ \ln(A^2 + B^2)/C^2 \} + i \{ \tan^{-1} B/A + 2\pi n' \}$$

ここに n' は 0 または整数 (ここでは 0 とする)。

$$A = \operatorname{dn} X \cdot \operatorname{cn} Y \cdot \operatorname{dn} Y - k \operatorname{cn} X \cdot \operatorname{cn} Y \quad \cdots (17)$$

$$B = k \operatorname{sn} X \cdot \operatorname{dn} X \cdot \operatorname{sn} Y \cdot \operatorname{dn} Y - k^2 \operatorname{sn} X \cdot \operatorname{cn} X \cdot \operatorname{sn} Y \quad \cdots (18)$$

$$C = 1 - \operatorname{dn}^2 X \cdot \operatorname{sn}^2 Y \quad \cdots (19)$$

したがって⑭, ⑮, ⑯式を⑥式に代入して

$$W = \frac{-i(\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2)}{(2n+1)\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{A^2+B^2}{c^2} + i \tan^{-1} \frac{B}{A} \right\} + \frac{i(\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2)}{2K'} (K+X+iY) + \Phi_2 + i\psi + \frac{i(\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2)}{(2n+1)} \ln k'$$

となる。ここに $\tan^{-1} B/A$ が主値をとるものとするれば $n=0$ である。

したがって
$$\Phi = \frac{\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2}{\pi} \tan^{-1} \frac{B}{A} - \frac{\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2}{2K'} Y + \Phi_2 \quad (20)$$

$$\psi = \frac{\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2}{\pi} (\ln k' - \frac{1}{2} \ln \frac{A^2+B^2}{c^2}) + \frac{\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2}{2} (\frac{K}{K'} + \frac{X}{K'}) + \psi_1 \quad (21)$$

3. 堤体間からの流出量

いまD点における ψ の値を②式から求めると

$X=K, Y=0, dnX=k', cnX=0$ であるから

⑰, ⑱, ⑲式は $A=k', B=0, C=1$ となる。

$$\ln \{ (A^2+B^2)/c^2 \} = 2 \ln k'$$

したがって

$$\psi_2 - \psi_1 = (\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2) (\frac{1}{2} K') \quad (22)$$

⑳式はCD区間からの流出量の算定式である。

この算定結果の一部を図-3に示す。

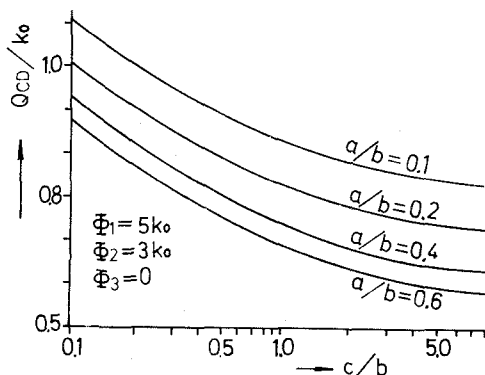


図-3 堤体間からの流出量

4. 堤体底面における圧力分布

一般に Darcy の法則が適用できる範囲内では浸透領域内の点において、その点の全水頭を h とし、その点の圧力を P 、位置水頭を y 、水の単位重量を w 、領域内の透水係数を k_0 とすれば

$\Phi = k_0 h = k_0 \{ (P/w) + y \}$ が成り立つ。したがって $y=0$ ときいた $P = w\Phi/k_0$ の関係式を用いれば堤体底面の圧力分布を求めることができる。ここに DF, BC 区間の Φ の値は、

$$W_i = \pm K + iY \quad dn(W_i, k) = k' cn(Y, k') / dn(Y, k')$$

$$cn(W_i, k) = \mp i k' sn(Y, k') / dn(Y, k')$$

より $B/A = \mp k' sn(Y, k') / cn(Y, k')$

$$\therefore \Phi = \frac{\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\mp k' sn(Y, k')}{cn(Y, k')} \right) - \frac{\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2}{2K'} Y + \Phi_2 \quad (23)$$

ここで $W_i = \pm K + iY$ に対する ζ 平面の値は⑥式より

$$\zeta = sn(W_i, k) = \pm 1 / dn(Y, k'), \quad \eta = 0 \quad (24)$$

なお⑳式の Arctan の項における符号は DF 区間において負、BC 区間において正とし⑳式においてはその逆をとる。

一方、①式を変形し、②式を用いて簡単にすると

$$Z = 2k'c(a+d)(1+k)S / \{ \{ c(1+k) + (a+b)(1-k) \} + \{ (a+b)(1-k) - k'c(1+k) \} S \} \quad (25)$$

⑳式に $Z = x + iy, S = \xi + i\eta$ を代入して実数部と虚数部にわけると

$$\begin{cases} x = k' \xi (r + s\xi) / \{ (r + s\xi)^2 + (s\eta)^2 \} \\ y = r s \eta / \{ (r + s\xi)^2 + (s\eta)^2 \} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} x = k' \xi (r + s\xi) / \{ (r + s\xi)^2 + (s\eta)^2 \} \\ y = r s \eta / \{ (r + s\xi)^2 + (s\eta)^2 \} \end{cases} \quad (27)$$

ここに $q = 2kc(a+d)(1+k)$
 $r = c(1+k) + (a+b)(1-k)$
 $S = (a+b)(1-k) - kc(1+k)$
 であり、②④式より、 $\eta = 0$ とおくと②④、②⑦式は

$$\begin{cases} x = \frac{q}{r} / (r + S) & \text{--- ②⑧} \\ y = 0 & \text{--- ②⑨} \end{cases}$$

したがって②④、②⑧、②⑨式より

DF: $x = \frac{q}{r} \{ \operatorname{rdn}(\gamma, k) + S \}, y = 0$ --- ③②

BC: $x = \frac{q}{r} \{ \operatorname{rdn}(\gamma, k) - S \}, y = 0$ --- ③①

図-4 堤体正面の圧力および滲み点の位置
 となる。すなわちW₁平面上のあるYに対する至は③②式より求められ、そのYに対するΣ平面上の値も③①式から定まるから堤体下の圧力分布を知ることができる。この算定結果の一部を図-4に示す。

5. 滲み点の位置

Σ平面上における滲み点の位置は③⑤式から求まる。

$$x_e = \frac{\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2}{\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2} \cdot \frac{\pi}{2kK} \quad \text{--- ③⑤'}$$

したがってこの場合も上と同様に③④式に③⑤式を代入すれば

$$x_e = (\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2) \pi q / \{ (\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2) 2kK'r + (\Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2) \pi S \}$$

よりΣ平面上の滲み点の位置が定まる。この算定結果の一部を図-4に点線で示している。

6. おおひ

以上の解析結果から次のようなことがいえる。

- ① 堤体間からの流量は堤体間隔に比例し、堤体幅に反比例する。
- ② 複式堤体の外側における水位の算術平均が堤体間の水位に等しい場合、堤体間に生ずる滲み点の左右の流入・流出量が等しくなり、堤体間の水位は変化しなくなる。
- ③ 堤体正面の圧力は堤体の両端において急激に変化し、その他の区間では徐々に変化する。
- ④ 複式堤体の外側における水位を一定と考えれば、滲み点の位置は堤体間の水位の一次関数となる。

参考文献

友近 晋 “楕円函数論” 応用数学叢書 基礎編第6巻 共立出版 昭和33年4月

F. Bowman “Introduction to Elliptic Functions with Application”

Dover Publications, INC. New York 1961

長 智男・中崎昭人 “浸透基盤上における Weep Hole を有する低堰堤下の揚圧と浸透水流について” 農業土木研究 第21巻 第4号 農業土木学会 昭和28年11月

森近 潔 “複式干拓の堤防下の浸透量について” 長崎干拓水利委員会研究資料

農業土木学会 昭和42年2月

林 桂一・森口繁一 “高等函数表” 岩波書店 1967年11月

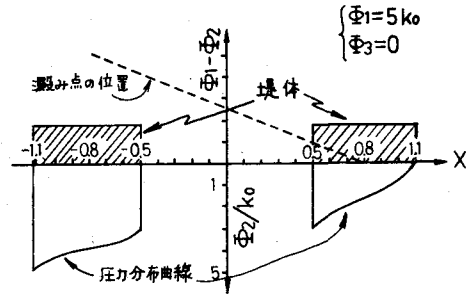


図-4 堤体正面の圧力および滲み点の位置