

九州大学工学部 正 員 栗谷陽一
九州大学工学部 正 員 古本勝弘
九州大学大学院 学生員 ○島田 晋
九州大学工学部 学生員 相川光弥

§ 1. まえがき この報告は、潮汐の作用による周期的流れを受ける河川感潮部で生じる乱流拡散現象に注目し、その流れ方向の拡散係数について検討を加えたものである。Harleman²⁾等は、Taylor¹⁾が、円管内定常流について導いた算式を用いて、周期的流れを受ける河口部での汚濁物質の拡散について、拡散係数を求めている。しかし、河口感潮部 (estuary) の長さかそれ程大きくないところでは、濃度分布形成の遅れが、拡散係数に現われてくる (前回、昭和43年度年次学術講演会 II-74、名古屋にて発表) ように思われる。流れ方向の拡散係数は、流速分布と断面での濃度分布との相関として表される物質輸送量 (拡散 flux) より求められるが、本報告では、濃度分布形成に対する遅れを考慮し、前回よりも近似度を高めて計算を行ない、実験も管径が太く、拡散の大きなものを追加した。

§ 2. 拡散係数の算定 まず準備として層流の場合を考える。半径 a の円管内を往復する流れの流速分布を求める。運動方程式は、円筒座標を用いて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

同期運動も考えて、 $u = U(r) e^{i\omega t}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = G e^{i\omega t}$ とおくと、(1) は、

$$i\omega U = \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) - G \quad (2)$$

(2) を、 $U(0) < \infty$, $U(a) = 0$ なる境界条件で解くと、

$$U = U_1 \left\{ J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) - J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \right\}, \quad U_1 = G / i\omega J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \quad (3)$$

円管断面の平均流速を $\langle U \rangle e^{i\omega t}$ とすると、

$$\langle U \rangle = U_1 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} J_1 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) - J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \right\}, \quad |\langle U \rangle|^2 = U_1^2 \left\{ \{f_1(\phi) - f_0(\phi)\}^2 + \{g_1(\phi) - g_0(\phi)\}^2 \right\} \quad (4)$$

$$\text{ただし、} \quad \phi = \frac{\omega a^2}{4\nu}, \quad J_0(2\sqrt{i\phi}) = f_0(\phi) - i g_0(\phi), \quad \frac{1}{\sqrt{i\phi}} J_1(2\sqrt{i\phi}) = f_1(\phi) - i g_1(\phi) \quad (*)$$

(4) で $\omega = 0$ とおくと、定常流に対する流速分布 U_s が得られる。

$$U_s = 2 \langle U \rangle \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (5)$$

次に、周期的流れのときの濃度分布を求める。層流のときの拡散方程式は、 ε を分子拡散係数として、

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (6)$$

$\frac{\partial c}{\partial x} \ll \frac{\partial c}{\partial r}$, $\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha = \text{const.}$ とし、 $C(x, r, t) = D(r) e^{i\omega t} + \alpha x + \text{const.}$ とおくと

$$i\omega D + \alpha U_1 \left\{ J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) - J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \right\} = \frac{\varepsilon}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dD}{dr} \right) \quad (7)$$

(7) で $D(0) < \infty$, $\left(\frac{dD}{dr} \right)_{r=a} = 0$ を満足するものを求める。

$$[\varepsilon \neq \nu] \quad D = \frac{\alpha U_1}{\varepsilon - \nu} \left\{ \frac{\nu}{U_1} J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) + J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) - \frac{\varepsilon \nu}{\varepsilon - \nu} \left\{ J_1 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) / J_1 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \right\} J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) \right\} \quad (8)$$

$$[\varepsilon = \nu] \quad D = \frac{\alpha U_1}{i\omega} \left\{ J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \left\{ J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) / J_1 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \right\} J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r J_1 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) \right\} \quad (9)$$

$$(8) \text{ で } \nu \rightarrow \infty \text{ とすると } D = \frac{2\alpha \langle U \rangle}{i\omega} \left\{ \frac{r^2}{a^2} - 1 + \frac{4\varepsilon}{\omega a^2} + \frac{2}{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} a J_1 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} r \right) J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} a \right) \right\} \quad (10)$$

以上の流速分布と濃度分布から、拡散物質輸送量の1周期の平均 $\bar{q} = \overline{u c} = \frac{1}{2} \varepsilon \langle U \rangle D$, ($\bar{U}$ は

の共役複素数), みかけの拡散係数 $K = -\frac{\langle \bar{u}^2 \rangle}{2\alpha} = -\frac{1}{2\alpha} \langle u(\tilde{u}D) \rangle$ を用いて層流の場合の

周期的流れによるみかけの拡散係数 K を求めると, $\psi = \frac{\omega a^2}{4E}$ とし, (f, g は(8)参照)

$$[E \neq 1] \quad K = \frac{\langle u \rangle^2 a^2}{8E} \frac{\psi \{ f_1(\psi) + g_1(\psi) \} \{ f_1(\psi) g_1(\psi) - g_1(\psi) g_1(\psi) \} - \psi \{ f_1(\psi) + g_1(\psi) \} \{ f_1(\psi) g_1(\psi) - g_1(\psi) g_1(\psi) \}}{(\psi^2 - \psi^2) \{ f_1(\psi) + g_1(\psi) \} \{ f_1(\psi) g_1(\psi) - g_1(\psi) g_1(\psi) \}^2} \quad (11)$$

$$[E = 1] \quad K = \frac{\langle u \rangle^2 a^2}{16E} \frac{2 \{ f_1(\psi) g_1(\psi) + g_1(\psi) g_1(\psi) \} \{ f_1(\psi) g_1(\psi) - g_1(\psi) g_1(\psi) \} - \psi \{ f_1(\psi) + g_1(\psi) \}^2}{\psi \{ f_1(\psi) + g_1(\psi) \} \{ f_1(\psi) g_1(\psi) - g_1(\psi) g_1(\psi) \}^2 + \{ g_1(\psi) - g_1(\psi) \}^2} \quad (Pr = \frac{1}{E} = 1) \quad (12)$$

$$(11) \text{で } \phi = \frac{\omega a^2}{4E} = 0 \text{ とおくと } K = \frac{\langle u \rangle^2 a^2}{4E} \frac{1}{\psi^2} \left\{ 1 + \frac{2}{\psi} \frac{f_1(\psi) g_1(\psi) - f_1(\psi) g_1(\psi)}{f_1(\psi) + g_1(\psi)} \right\} \quad (Pr = \infty) \quad (13)$$

$\omega = 0$, 即ち $\psi = \phi = 0$ とすれば, (11), (12), (13) は, 定常流の場合のみかけの拡散係数

$$K_s = \frac{\langle u \rangle^2 a^2}{8E}$$

となる。図-1 には, (12), (13) より得られた K/K_s の値を示している。

その差は, 最大でも僅かに 0.085 である。 $1 \rightarrow \infty$ ($\phi = \frac{\omega a^2}{4E} = 0$) としたことは, 流速分布の遅れを無視したことに当る。したがって, 流速分布の遅れは, K の値にはほとんど影響せず, 濃度分布の遅れが, 主要な意味をもつと考えてよいだろう。

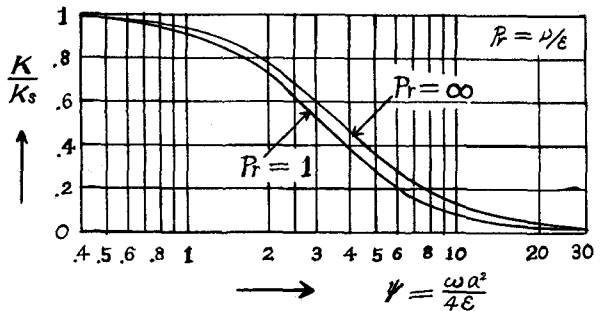


図-1. 層流のときの拡散係数

次に乱流の場合のみかけの拡散係数を求める。乱流の場合も, 流速分布の遅れは大きくないものと考え, 周期的流れの瞬時の流速分布は, 定常流の流速分布に等しいとして, 近似計算を行なう。

円管内の流速分布を universal な分布と仮定し,

$$\frac{\langle u \rangle - u(z)}{u_*} = f(\xi) \quad (14)$$

ここに $u(z)$: 管軸方向の流速, $\langle u \rangle$: 断面での平均流速, $\xi = r/a$, u_* : マサツ速度とかく。 Reynolds の Similarity を仮定すれば, 乱流拡散係数 E は,

$$-E = \tau / \rho \frac{\partial u}{\partial r} = m / \rho \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \text{円管について} \quad E = \alpha \xi |u_*| / \frac{dE}{d\xi} \quad (15)$$

乱流の場合の拡散方程式は, 円筒座標を用いて次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Er \frac{\partial C}{\partial r}) \quad (16)$$

ここで $\frac{\partial C}{\partial z} = \alpha = \text{const.}$, $\langle u \rangle = \varphi u_* \Rightarrow 1/\cos \omega t$ とおき (14) を書きかえると,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\alpha \langle u \rangle}{\varphi} (\varphi - f) \cos \omega t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Er \frac{\partial C}{\partial r}) \quad (17)$$

濃度分布 $C(x, z, t)$ を x の関数と (z, t) の関数に分けて

$$C(x, z, t) = C_0 + \alpha x + \alpha a f(\xi) \cos \omega t - \frac{\alpha a^2 \omega \varphi}{11} f(\xi) \sin \omega t \quad (18)$$

とおき, (17) に代入すれば

$$\frac{1}{\varphi} |\cos \omega t| \cos \omega t \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{f} \frac{dC}{d\xi} \right) - \alpha \omega |\cos \omega t| \sin \omega t \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{f} \frac{dC}{d\xi} \right) = \frac{1}{\varphi} \{ (\varphi - f) - \left(\frac{\alpha \omega \varphi}{11} \right) f \} \cos \omega t - \alpha \omega f \sin \omega t \quad (19)$$

(19) に, $\cos \omega t$, あるいは $\sin \omega t$ とおいて, 1 周期積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{f} \frac{dC}{d\xi} \right) \right) = (\varphi - f) - \left(\frac{\alpha \omega \varphi}{11} \right) f \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{f} \frac{dC}{d\xi} \right) \right) = f \quad (21)$$

(20), (21) において, $\frac{\alpha \omega \varphi}{11}$ があまり大きくないとして展開して高次の項を省略し, $\xi = 0$ で

$\frac{d^2 C}{d\xi^2} = \frac{d^2 C}{d\xi^2} = 0$, $2 \int_0^1 f \xi d\xi = \langle f \rangle = 0$, $\langle f \rangle = 0$ の条件を用いて $f(\xi)$, $J(\xi)$ の近似解を求める

$$\langle f(r) \rangle = \frac{8}{3\pi} f(r) = r_0 + \psi(r) - \left(\frac{2\omega f}{U} \right) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(r) d\theta d\theta \quad f(0) = r_0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{8}{3\pi} \right)^2 \psi(r) = r_0 + 2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \psi(r) (1 - \langle \psi \rangle) d\theta d\theta \quad \psi(0) = r_0 \quad (23)$$

$$\text{ここには} \quad \psi(r) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\psi - \langle \psi \rangle) d\theta d\theta \quad \langle \psi \rangle = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \psi d\theta d\theta \quad (24)$$

また、単位断面当りの拡散物質輸送量 $\langle f \rangle$ は、

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi a} \int_0^a C(u - \langle u \rangle) 2\pi r dr = -\alpha a \frac{U}{D} (\cos \omega t) \langle f \rangle + \alpha a^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t \langle f \rangle \quad (25)$$

ゆえに $\langle f \rangle$ の1周期の平均 $\langle \bar{f} \rangle$ を求めると

$$\langle \bar{f} \rangle = -\frac{1}{2} \alpha a \frac{U}{D} \langle f \rangle \quad (26)$$

したがって、周期的流れが乱流のときのみかけの拡散係数 K を求めると次のようになる。

$$K = \frac{1}{2} a \frac{U}{D} \langle f \rangle \quad (27)$$

$\omega = 0$, 即ち定常流の場合の拡散係数 K_s について Taylor¹⁾ は次のように与えている。

$$K_s = a \frac{\langle \bar{u} \rangle}{D} \langle f \rangle = 10.1 a \bar{u}_* \quad (28)$$

(27)において、 $\omega = 0$ とおき、1周期の平均流速 $\langle \bar{u} \rangle = \frac{2U}{\pi} = 2 \bar{u}_*$ を用いて、 K_s を求めると

$$K_s = \frac{3\pi^2}{32} a \frac{\langle \bar{u} \rangle}{D} \langle f \rangle = 0.985 K_s \quad (29)$$

となり、近似計算の誤差は約1割と考えられる。そこで定常流についての Taylor の計算とも一致する

ように、 $f(r) = \frac{8}{3\pi} f(r)$ とおき、周期的流れの Stokes $S = \frac{2U}{\omega}$ を用いて、拡散係数を書きかえると、

$$K = a \frac{\langle \bar{u} \rangle}{D} \langle f \rangle = K_s / \{1 + \lambda \left(\frac{S}{a} \right)^2\} \quad (30)$$

ただし $f(r)$ に Taylor¹⁾ の与えている分布形を用い、 $\psi(r)$ を (23) から求めると

$$\lambda = 4 \left\langle f \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \psi d\theta d\theta \right\rangle = 9.0$$

拡散係数の計算値は、図-3 に破線で示している。

§3. 実験装置と実験方法 前報告での実験は、パイプ直径 10 mm, 11°1' 長さ 3 m ピストンをモーターで駆動して周期的流れを起こしたが、装置が小さすぎたため、 Re 数は、略々 10^4 が最高限界であった。そのため、十分発達した乱流域までデータを取ることはできなかったようである。またトレーサー（塩水）の注入と一点で行っていたため、理論の大きな決定である $\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha = \text{const.}$ を十分に満足していたとは思われない。この二つの原因から、新報告では、理論値と実験値との差が大きくなってしまったように考えられたので、今回の追加実験では、装置を新しく作った。その実験装置の概略を 図-2 に示す。まず管径を 66 mm, 管の長さを 24.7 m と大きくして、 Re 数の大きなとこ

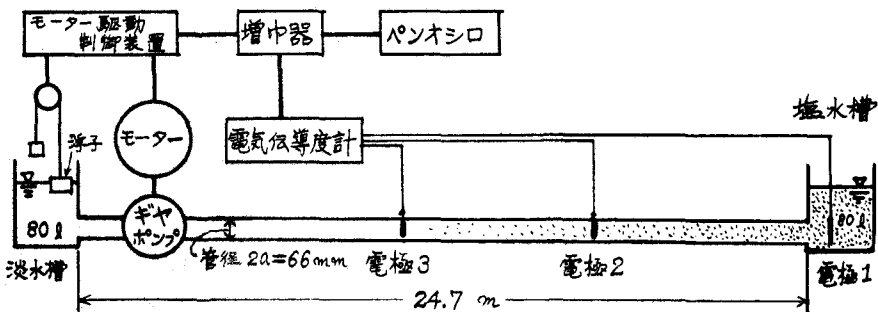


図-2. 実験装置略図

この実験を行なった。また、管の両端に、浴槽側の塩水槽と淡水槽を設け、管軸方向の濃度勾配が、大体一定になるようにした。そして、ギヤポンプを周期的に向きを変えるようにモーターで駆動して、周期的流れを生じさせた。その駆動方式は、中央の水槽に設けた浮子（フロート）で水位を検出し、水位指令信号との差により、モーターを可逆ワードレオナード方式によって制御した。塩水濃度は、管路部2ヶ所と塩水槽の計3点で、電気伝導度計により測定した。今回は4電極法によって、電気伝導度を測定し、濃度変化をペン書きオシログラフに記録させた。電極として使用した白金線の太さは、0.3 mmであった。このようにして得られた3点の濃度時間曲線より、管軸方向の濃度勾配と単位時間当りの拡散物質の輸送量を求め、みかけの拡散係数 K を計算した。

§4. 実験結果と考察

実験によって得られた みかけの拡散係数 K の値を 図-3 に示している。これは前回報告したものに、今回の追加実験（スケールの大きな新しい実験装置を使用したもの）から得られた拡散係数の値を加えたものである。小さなスケールの実験から得られた値は、理論値との差が大きく、 Re 数が 10^4 を越えた付近から下がる傾向を見せていたが、追加実験では略々理論曲線上の値が得られている。そこで、同じ S/a の値を連ね、図-3 上に曲線を描いてその傾向を考えてみると、スケールの小さな実験から得られた値は、遷移領域であることが一層明確になっている。これから更に Re 数が大きくなると、拡散係数の値は理論曲線に漸近するものと思われる。

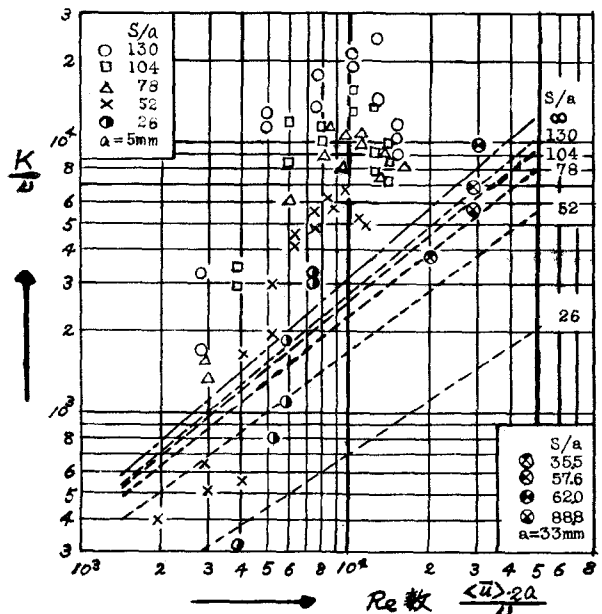


図-3. 拡散係数 K の実測値と計算値

§5. むすび 周期的流れにおいては、ストローフの大きさ（感潮河川では estuary の長さ）が、拡散現象に大きく影響を与えている。ストローフがあまり大きくないところでの拡散係数は、濃度分布形成の遅れによって、定常流として計算されたみかけの拡散係数よりも小さくなることから明らかにされ、実験によってもこの傾向はある程度確かめられた。

本報告の計算には、九州大学中央計数施設の OKITAC 5090-H 電子計算機を使用した。

参考文献 1) Taylor, G.I. 1954. Proc. Roy. Soc. A. Vol. 223, p.446-68

"The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe"

2) Harleman, D.R.F. "Estuary and coastline hydrodynamics"—A.T. Ippen

"Pollution in Estuaries" p.630-47.