

# III-5

## 河床変動の一計算法

九州大学 工学部 正員 平野泉夫

まじかき

河床が砂や礫でできている河川においては、流水とともに河床の砂礫も移動する。そして、この移動砂礫は、その砂礫を輸送する能力のない場所にくると堆積し、逆に輸送能力の大きい所では河床の砂礫は流出し洗掘される。ダムの築造による上流の Back sand と下流の河床低下、Short cut 部の河床変動などはその代表例である。このような河床変動の計算法としては、特性曲線による解法や、不等流計算と流砂量計算を交互に組合せる方法などが試みられている。これらはいずれも時刻  $t$  における河床高  $z$  と流量  $Q$  を用いて不等流計算を行ない、それらの水理量が  $\Delta t$  時間中変わらないとして時刻  $t + \Delta t$  における河床高を求めるというやり方である。この計算は非常に手間がかかるので、普通電子計算機で行なわれるが、電算では流砂量の計算や河床高の計算にくらべて不等流計算に要する時間がかつと多いため、計算時間の大部分が不等流計算についやされる。しかし、いすれにしても計算は微分方程式を差分式になおして数値的に解くわけであるから、 $\Delta t$  時間後の河床変動量  $\Delta z$  は微小な値ではなくてはならない。そこで、筆者は、河床が微小量変動することと不等流計算をやりなす必要はないと考え、河床変動量  $\Delta z$  から水深や断面積の変動量を求める近似式を導き、不等流計算の簡略化を試みた。また、実際河川は複断面形の場合が少なくないので、複断面河川の不等流式を導き、河床変動計算式を示した。

### 1. 河床変動計算式

河床変動は通常次の3式を連立して解く。

$$1) \text{ 不等流の式 } \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha V^3}{2g} \right) + I_e = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$2) \text{ 河床の連続の式 } \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial Q_b}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

3) 流砂量の式… Einstein の式をはじめ多くの公式がある。

ここに、 $z$ : 河床高、 $B$ : 河床幅、 $h$ : 水深、 $\alpha$ : エネルギーの補正係数、 $V$ : 平均流速

$I_e$ : エネルギー勾配、 $\lambda$ : 河床砂の空けき率、 $Q_b$ : 流砂量

式(1)を時間  $t$  で微分すると、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{\alpha V^3}{2g} \right) + \frac{\partial I_e}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

上式を差分式にして、

$$\left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_i - \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{i-1} + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_i - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{i-1} + \frac{\alpha}{2g} \left\{ \left( \frac{\partial V^3}{\partial t} \right)_i - \left( \frac{\partial V^3}{\partial t} \right)_{i-1} \right\} + \frac{\alpha}{2} \left\{ \left( \frac{\partial I_e}{\partial t} \right)_i + \left( \frac{\partial I_e}{\partial t} \right)_{i-1} \right\} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

ここに、添字  $i$  は上流側断面、 $i-1$  は下流側断面の量を示す。

簡単のため断面は広矩形とし、エネルギー勾配は対数分布則を用いた次式

$$I_e = F_r^2 / \phi^2 \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $Fr$ : フルード数,  $\varphi = V/u_*$ ,  $u_* = \sqrt{g R I_e}$ ,  $R$ : 径深  
を用い、流れが定流であるとすると、式(4)より

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_i \left\{ \frac{1}{B_i} (1 - Fr_i^2) - \frac{3\Delta x}{2\varphi^2} \frac{Fr_i^2}{A_i} \right\} + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{i-1} \left\{ \frac{1}{B_{i-1}} (1 - Fr_{i-1}^2) + \frac{3\Delta x}{2\varphi^2} \frac{Fr_{i-1}^2}{A_{i-1}} \right\} + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{i-1} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $A$ : 流積,  $\Delta x$ : 区間距離  
上式において、次の差分式

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_i &= \frac{1}{\Delta t} (A_{i,j+1} - A_{i,j}) \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_i &= -\frac{1}{(1-\lambda)B_i} \left(\frac{\partial Q_B}{\partial x}\right)_i = -\frac{1}{(1-\lambda)B_i \Delta x} (Q_{B,i,j} - Q_{B,i-1,j}) \end{aligned}\right\} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、添字 $j$ は時刻 $t$ における量,  $j+1$ は時刻 $t+\Delta t$ における量を示す。

を用いれば、時刻 $t$ における諸量と $A_{i,j}$ より $A_{i,j+1}$ を求めることができる。

なお、式(6)は不等流の逐次計算式

$$R_i + Z_i - R_{i-1} - Z_{i-1} - \frac{\alpha Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_i^2} - \frac{1}{A_{i-1}^2} \right) + \frac{\Delta x}{2} (I_{e,i} + I_{e,i-1}) = 0 \dots \dots \dots (8)$$

において、 $(\partial A/\partial t)\Delta t = \Delta A$ ,  $(\partial Z/\partial t)\Delta t = \Delta Z$ ,  $(\partial R/\partial t)\Delta t = \Delta R$ ,  $(\partial I_e/\partial t)\Delta t = \Delta I_e$  とした $\Delta t$ 時間後の次式

$$\begin{aligned} (R + \Delta R)_i + (Z + \Delta Z)_i - (R + \Delta R)_{i-1} - (Z + \Delta Z)_{i-1} - \frac{\alpha Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{(A + \Delta A)_i^2} - \frac{1}{(A + \Delta A)_{i-1}^2} \right\} \\ + \frac{\Delta x}{2} \{ (I_e + \Delta I_e)_i + (I_e + \Delta I_e)_{i-1} \} = 0 \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

より式(8)をさし引き、Taylor展開して2次以上の微小項を無視した次の関係式

$$\frac{1}{(A + \Delta A)^2} \div \frac{1}{A^2} \left( 1 - 2 \frac{\Delta A}{A} \right), \quad \frac{1}{(A + \Delta A)^3} \div \frac{1}{A^3} \left( 1 - 3 \frac{\Delta A}{A} \right) \dots \dots \dots (10)$$

を代入すれば得られる。精度を上げるために、Taylor展開の2次の項までとった次式

$$\frac{1}{(A + \Delta A)^2} \div \frac{1}{A^2} \left\{ 1 - 2 \frac{\Delta A}{A} + 3 \left( \frac{\Delta A}{A} \right)^2 \right\}, \quad \frac{1}{(A + \Delta A)^3} \div \frac{1}{A^3} \left\{ 1 - 3 \frac{\Delta A}{A} + 6 \left( \frac{\Delta A}{A} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (11)$$

を用いれば、式(6)は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta A}{A}\right)_{i-1}^2 \left( 3 Fr_{i-1}^2 \frac{\Delta x}{\varphi^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha Q^2}{g A_{i-1}^2} \right) + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)_{i-1} \left( \frac{\alpha Q^2}{g A_{i-1}^2} - \frac{3}{2} Fr_{i-1}^2 \frac{\Delta x}{\varphi^2} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right) + \Delta Z_i - \Delta Z_{i-1} \\ + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)_i^2 \left( 3 Fr_i^2 + \frac{3}{2} \frac{\alpha Q^2}{g A_i^2} \right) + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)_i \left( \frac{A_i}{B_i} - \frac{\alpha Q^2}{g A_i^2} - \frac{3}{2} Fr_i^2 \frac{\Delta x}{\varphi^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

上式は $\Delta A_{i-1}$ についての2次式であるから、他の量が既知であれば簡単に解ける。

## 2. 数値計算例

式(6), (7)を用いて数値計算を行なってみる。計算条件次のとおりとする。

- 1) 断面は幅200mの矩形断面、定流で $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\varphi = 15$ 。
- 2) 初期条件 河床勾配 $I = 1/2000$ ,  $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$  の等流状態。

3)境界条件 下流端で水位一定、上流端で流砂量  $Q_{B0}$  一定。  $Q_{B0}$  は  $I=1/3000$  の等流に対応する値を用いる。このように境界条件は下流加海に流入する排水路などに対応する。

4)流砂量の式  $g_B = 20 \sqrt{sgd^3} \{ (u^2/sgd)^2 - (u_{*c}^2/sgd)^2 \}$  ,  $S=1.65$  ,  $d=0.1 \text{ cm}$  ,  $u_{*c}^2=5.5 \text{ cm}^2/\text{s}^2$  ,

5)  $\Delta x=400 \text{ m}$  ,  $\Delta t=0.2 \text{ 日}$

以上による計算結果を図-1に示す。計算は九大中央計数施設 OKITAC-5090H で行なった。所要時間は  $\Delta x$  断面  $\times 260$  time interval で 195 sec であった。

なお、 $\Delta t=1 \text{ 日}$  とした計算も行なったが、計算初期を除き  $\Delta t=0.2 \text{ 日}$  の場合と殆んど差がなかった。従って、この計算法を実用に供しうろと考えられる。

河床高  
 $Z(\text{m})$

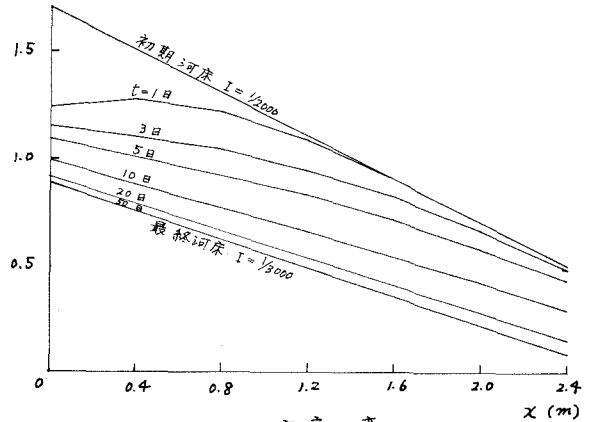


図-1 河床高の変化

### 3. 複断面河川への適用

#### 3.1 複断面河川の不等流式

不等流の基礎式は次式で示される。

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\alpha V^3}{2g} \right) + I_e = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $H$ : 水位、 $\alpha$ : エネルギーの補正係数で  $\alpha = \int u^3 dA / V^3 A$  ,  $u$ : 流速深さ方向の平均流速を  $V$  , そのエネルギー補正係数を  $\alpha_v$  とすると、

$$\alpha = \frac{1}{V^3 A} \int \alpha_v u^3 dA = \frac{1}{V^3 A} \sum \alpha_{vi} V_i^3 A_i \quad \dots \dots \dots (14)$$

平均流速公式として Manning 式を用い、流れが2次元的であるとし、エネルギー勾配が低水路と高水路で共通であるとすれば、

$$I_e = \frac{Q^2}{\left( \frac{1}{n_L} A_L R_L^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n_H} A_H R_H^{\frac{2}{3}} \right)^2} \quad \dots \dots \dots (15)$$

また、 $\alpha_v$  は 1.0~1.1 程度の値であり、通常一定として与えるので、 $\alpha$  も定数とすると、

$$\alpha = \alpha_v A^2 \frac{\frac{1}{n_L^2} A_L R_L^2 + \frac{1}{n_H^2} A_H R_H^2}{\left( \frac{1}{n_L} A_L R_L^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n_H} A_H R_H^{\frac{2}{3}} \right)^3} = \alpha_v \left( 1 + \frac{A_H}{A_L} \right)^2 \frac{1 + \left( \frac{A_H}{A_L} \right)^3 \left( \frac{n_L}{n_H} \right)^2 \left( \frac{S_H}{S_L} \right)^2}{\left\{ 1 + \left( \frac{A_H}{A_L} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{n_L}{n_H} \left( \frac{S_H}{S_L} \right)^{\frac{2}{3}} \right\}^3} \quad \dots \dots \dots (16)$$

ここに、添字  $L$  は低水路、 $H$  は高水路の諸量を示す。  $R$ : 径深、 $n$ : 粗度係数、 $S$ : 浦辺式(15)および(16)を(13)に代入すると複断面河川の不等流の式が次式のようになり得られる。

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\alpha_v Q^2}{2g} \frac{\frac{1}{n_L^2} A_L R_L^2 + \frac{1}{n_H^2} A_H R_H^2}{\left( \frac{1}{n_L} A_L R_L^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n_H} A_H R_H^{\frac{2}{3}} \right)^3} \right\} + \frac{Q^2}{\left( \frac{1}{n_L} A_L R_L^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{n_H} A_H R_H^{\frac{2}{3}} \right)^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (17)$$

$\alpha$  に対する複断面形状の影響をみるために、 $\alpha/\alpha_v$  と  $(n_H/n_L)^{1/5} (S_H/S_L)$  の関係を  $A_H/A_L$  をパラメータとしてプロットすると図-2 のようになる。これより  $\alpha$  はかなり大きな値になる場合のあることがわかるが、 $A_H/A_L$  が小さい場合や  $(n_H/n_L)^{1/5} (S_H/S_L)$  が 1 に近い場合は  $\alpha$  は 1 に近く変化も少ない。従って、

高水敷の流槽が低水路のそれに較べてかなり小さい場合、高水敷と低水路の粗度係数が等しいような場合には $\alpha$ は従来と同様一定としても差支えないと思われる。

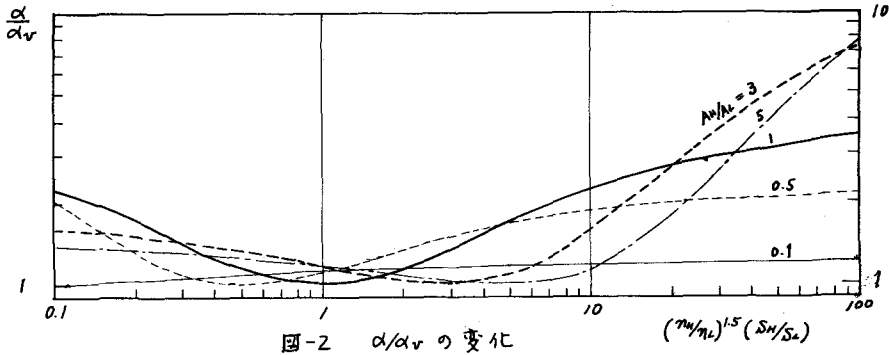


図-2  $\alpha/\alpha_r$  の変化

### 3.2 複断面河川の河床変動式

高水敷は植生に覆われていたり、土砂でできているため流速が小さく、土砂が移動しない場合が多い。そこで、高水敷は固定で低水路床のみ移動する場合を考える。

図-3 のような断面を考え、式(17)に式(3)~(5)と同様の操作を施せば式(6)に対応する次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial h_L}{\partial t} (1+G_1) + \frac{\partial Z_L}{\partial t} (1+W_1) \right\}_1 = \left\{ \frac{\partial h_L}{\partial t} (1+G_2) + \frac{\partial Z_L}{\partial t} (1+W_2) \right\} \dots \dots \dots (18)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち、} \quad G_1 \Big\} &= \frac{B_{L0}}{A_L} \left\{ F \left( \frac{3P_L}{N} - \frac{5K_L}{M} \right) \mp \frac{5}{3} \frac{Q^2 \alpha x K_L}{M^3} \right\} \\ G_2 \Big\} &+ \frac{1}{A_H} \left\{ B_{H0} + 2m_H (Z_L + h_L - H_0) \right\} \left\{ F \left( \frac{3P_H}{N} - \frac{5K_H}{M} \right) \mp \frac{5}{3} \frac{Q^2 \alpha x K_H}{M^3} \right\} \\ &- \frac{2\sqrt{1+m_H^2}}{S_H} \left\{ 2F \left( \frac{P_H}{N} - \frac{K_H}{M} \right) \mp \frac{2}{3} \frac{Q^2 \alpha x K_H}{M^3} \right\} \end{aligned}$$

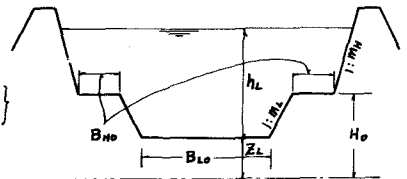


図-3 河川横断面図

$$\frac{W_1}{W_2} \Big\} = \frac{2(\sqrt{1+m_L^2} - m_L)}{S_L} \left\{ 2F \left( \frac{P_L}{N} - \frac{K_L}{M} \right) \mp \frac{2}{3} \frac{Q^2 \alpha x K_L}{M^3} \right\}$$

$$+ \frac{1}{A_H} \left\{ B_{H0} + 2m_H (Z_L + h_L - H_0) \right\} \left\{ F \left( \frac{3P_H}{N} - \frac{5K_H}{M} \right) \mp \frac{5}{3} \frac{Q^2 \alpha x K_H}{M^3} \right\} - \frac{2\sqrt{1+m_H^2}}{S_H} \left\{ 2F \left( \frac{P_H}{N} - \frac{K_H}{M} \right) \mp \frac{2}{3} \frac{Q^2 \alpha x K_H}{M^3} \right\}$$

$$F = \frac{N}{M^3}, \quad N = P_L + P_H, \quad M = K_L + K_H, \quad K = \frac{AR^{\frac{3}{2}}}{n}, \quad P = \frac{AR^2}{n}$$

附号 $\mp$ は $-$ をとったものか $G_1, W_1$ ,  $+$ をとったものか $G_2, W_2$ である。

まとめ

- i) 河床変動の簡易計算式(4)式を導入した。
- ii) 式(6)を用いて数値計算を行ない、式(6)が使用に供することと認められた。
- iii) 複断面河川の不等流の式(17)および河床変動の式(18)を示した。