II-7　弾性ヒンジを持つ構造物の一解析法

熊本大学　正員　○平井一男
同　　　　学生　森光伝
同　　　　同　　古庄憲彦

まえがき

この研究は複雑な構造物の一部が破壊を起こし，弾性ヒンジのような構造になった場合，弾性ヒンジが生じる以前のsystemの固有振動数と振動モードをもとにして簡単に解析を進める一方法を示したものである。

解析理論

周期モーメント荷重$M_0 \sin\omega t$がある振動系に作用するとき（図-1），そのたわみは次式にて与えられる。

$$W=\left[W_S+\sum\Omega_n \Phi_n(x_i)\Phi_n'(x_j)\right]M_0 \sin\omega t \qquad (1)$$

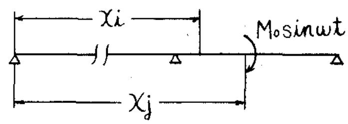

図-1

ここに $\Omega_n=\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)}$

W_S：単位の静的モーメント荷重が作用するときの静的たわみ。
$\Phi_n(x)$：n次の正規化した振動モード。　x_i：測定点の座標。
ω_n：n次の固有振動数。　x_j：荷重点の座標。

上式の関係を使用すれば，（図-2）に示すような曲げ荷重（Δx_jはなれた微少区間に作用する等大逆方向の一対のモーメント荷重）が作用するとき，そのたわみは式(2)にて与えられる。

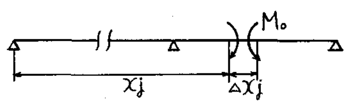

図-2

$$W=\left[W_{Sm}-\sum\Omega_n \Phi_n(x_i)\Phi_n''(x_j)\right]M_0\cdot\Delta x_j \sin\omega t \qquad (2)$$

ここに　W_{Sm}：単位の静的曲げ荷重$M_0\cdot\Delta x_j=1$による静的たわみ。

式(2)の$M_0\Delta x_j$を新しい一つの外力と考え，これを曲げ荷重とよび記号$\mathfrak{M}$にて表わすことにすれば式(2)は式(3)となる。

$$W=\left[W_{Sm}-\sum\Omega_n \Phi_n(x_i)\Phi_n''(x_j)\right]\mathfrak{M} \sin\omega t \qquad (3)$$

たわみが決定されたならば任意の点の曲げモーメントは周知のように次式により求められる。

$$M = -EI \times \frac{d^2w}{dx^2}$$

式(3)で $\sin\omega t = 1$ とし，一様断面梁として適用すれば，

$$M = \left[M_{sm} + EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] \mathfrak{M} \tag{4}$$

ここに M_{sm}: $\mathfrak{M}=1$による静的な曲げモーメント。

今後解析を簡単ならしめるため，一様断面梁を使用することにする。今，荷重点付近の$\mathfrak{M}$とMとの関係を拡大して示すと(図−3)のようになる。

曲げ荷重$\mathfrak{M}$が作用した場合，部材の曲げモーメントは断面二次モーメントI_aとI_bに比例して内分される。同様に荷重$\mathfrak{M}$もI_aとI_bの比に内分されている。今、Δx_jの微少部分では力の釣合に関する限り釣合っているのであるから，I_aの部分に生じる曲げモーメントとそれに対応する外力（点線で囲んだ部分）だけ除去することができる。そして残りの部分で，自由振動においては外力が零であるという条件を満足させるためには次の関係式が成立しなければならない。

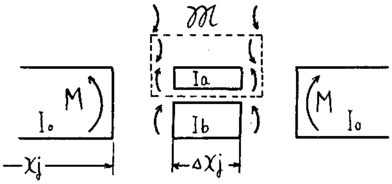

図 −3

$$\frac{I_b}{I_a + I_b} M + \frac{I_b}{I_a + I_b} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{\Delta x_j} = M \tag*{}$$

ここで $I_b / I_a = K$ とおくと

$$M - K \cdot \frac{1}{\Delta x_j} \cdot \mathfrak{M} = 0 \tag{5}$$

よって(4)式を(5)式に用いて振動数方程式を次式のように求めることができる。

$$\left[M_{sm} + EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_j) - K/\Delta x \right] \mathfrak{M} = 0 \tag{6}$$

計算例

（図−4(a)）に示すような弾性ヒンジを有する連続梁の動的解析を行ってみる。

これを解くには（図−4(b)）の単純梁に一対のモーメント荷重と，動的集中荷重（何れも周期力）を同時に作用させ，点x_1で弾性ヒンジの条件，点x_2で変位ゼロの条件を考えればよいことになる。この時のたわみWと曲げモーメントMは次式より求まる。

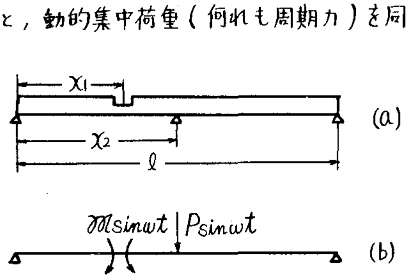

図 − 4

$$
\left.
\begin{aligned}
W &= \left[W_{sm} - \sum \Omega_n \Phi_n(x_i)\, \Phi_n''(x_1) \right] \mathfrak{M} + \left[W_{sp} + \sum \Omega_n \Phi_n(x_i) \Phi_n(x_2) \right] P \\
M &= \left[M_{sm} + EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_1) \right] \mathfrak{M} + \left[M_{sp} - EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n(x_2) \right] P
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

ここに

W_{sp}:単位の P による静的たわみ　　　M_{sp}:単位の P による静的曲げモーメント

W_{sm}:単位の $\mathfrak{M}$ による静的たわみ　　　M_{sm}:単位の $\mathfrak{M}$ による静的曲げモーメント

与系では　　$x_i = x_2$ において　　$W = 0$

　　　　　　$x_i = x_1$ において　　$M - K/\Delta x = 0$

この条件を(7)式に代入すると

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left[W_{sm2} - \sum \Omega_n \Phi_n(x_2) \Phi_n''(x_1) \right] \mathfrak{M} + \left[W_{sp2} + \sum \Omega_n \left\{ \Phi_n(x_2) \right\}^2 \right] P = 0 \\
&\left[M_{sm1} + EI_0 \sum \Omega_n \left\{ \Phi_n''(x_1) \right\}^2 - K/\Delta x \right] \mathfrak{M} + \left[M_{sp1} - EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_1) \Phi_n(x_2) \right] P = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

ここに

W_{sm2}: x_2点における単位の $\mathfrak{M}$ による静的たわみ

W_{sp2}: x_2点における単位の P による静的たわみ

M_{sm1}: x_1点における単位の $\mathfrak{M}$ による静的曲げモーメント

M_{sp1}: x_1点における単位の P による静的曲げモーメント

式(8)より与系の振動数方程式は次のように求められる。

$$
\begin{vmatrix}
W_{sm2} - \sum \Omega_n \Phi_n(x_2) \Phi_n''(x_1) & W_{sp2} + \sum \Omega_n \left\{ \Phi_n(x_2) \right\}^2 \\
M_{sm1} + EI \sum \Omega_n \left\{ \Phi_n''(x_1) \right\}^2 - K/\Delta x & M_{sp1} - EI \sum \Omega_n \Phi_n''(x_1) \Phi_n(x_2)
\end{vmatrix} = 0 \quad (9)
$$

上式より固有振動数 ω_m を決定し，これを(8)式に使用すれば，$\mathfrak{M}$ と P との比が与えられる。この比を式(7)の第一式に使用すれば振動モードを決定することができる.

数値計算例として，$x_1 = 3/8 \cdot l$，　$x_2 = 1/2 \cdot l$　として求めた固有値の概略値と普通ヒンジとの比較は（図-5）のようになる。

ただし　$\overline{\omega}^2 = \omega^2 \Big/ \left(\frac{EI}{\rho l^4} \right)$

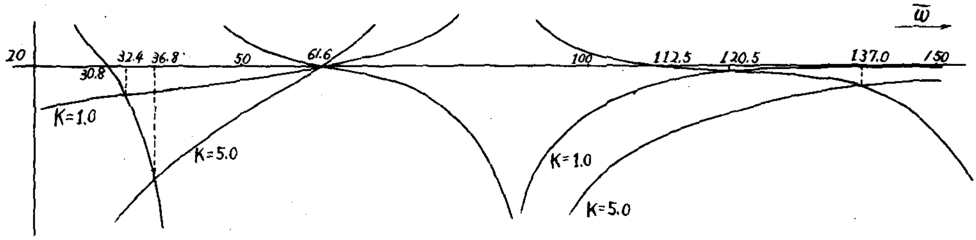

図-5

むすび

上述の解析過程よりわかるように提案の方法は始めに弾性ヒンジを無視した基本系を考え，それに弾性ヒンジを作り出すことにより基礎式を導きだしている。
任意複合構造物において，その単位構造物が一部破壊（完全なる破壊に対しての意）を生じた場合，その破壊部を弾性ヒンジと考え，その単位構造物の弾性ヒンジを無視した系における固有値，固有ベクトルが与えられていれば，一部破壊を含む複合構造物の解析が容易に行えることになる。
もし単位構造物の基本系として単純梁を使用できれば解析は簡単となる。