

II-3

走行荷重による橋梁の撓み振動のスペクトル解析

九州大学工学部 正員 小坪清真

学生員 荒牧軍治

学生員 原田譲二

〇学生員 測田政信

1. 序

現在、車輛が梁上を滑らかに移動し、車輛の重量の慣性力を無視した場合の梁の応答については幾多の研究がなされており、又、車輛重量の慣性力を定常入力として解析したものも多い。ところで、走行時の自動車の振動は、路面床版の凹凸、エンジン、回転部分のアンバランス、その他に起因し、その現象は一般に不規則過程である。不規則過程であるとする、一般的な数値解析、例えばModal analysisによる、あるいは多質点系に分けて行う数値解析などの方法が考えられるが、その解析は非常に複雑であり、多くの労力を要するので、統計的解析を行う方がより便利である。かかる一般調和解析は、連続不規則振動を行う力学系の解析に適した手段であり、この場合周波数特性の表示法として、パワースペクトルは最も有効である。著者等は、香椎跨線橋(多々良1号線、国鉄香椎操車場上)で実験を行い、種々異なる自動車速度のもとで、自動車加速度、橋梁加速度、橋梁の変位を測定した。そこで得られたデータをもとに、パワースペクトルを用いて、橋梁の撓み振動の統計的解析の一資料に供さんとするものである。Fig-1は香椎跨線橋の概略図である。*印は測定位置を示す。

2. 仮定及び記号

- (1) 実験に使用した香椎跨線橋はトラス橋であるが、便宜上これを等断面の単純梁として扱う。
- (2) 梁の軸力は考慮しないものとする。
- (3) 梁の剛度は、トラス橋の撓み曲線を梁に中央集中荷重が作用した場合の撓み曲線と同一とし、 $EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M$ の式より求めたものである。
- (4) 自動車速度を v km/h、自動車総重量を W t、梁の長さを l m、梁の単位長重量を w t/m とする。

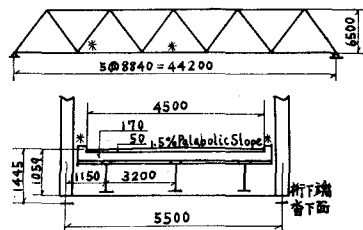


Fig-1

3. 橋梁の振動の基本方程式

s 次の一般座標を q_s 、 s 次の振動型を Y_s 、撓みを y とすると、 $y = \sum_{s=1}^{\infty} q_s Y_s$ である。

振動型を $Y_s = \sin \frac{s\pi x}{l}$ と仮定すると $y = \sum_{s=1}^{\infty} q_s \sin \frac{s\pi x}{l}$ (1)

梁の運動エネルギー K は

$$K = \frac{w}{2g} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{wl}{4g} \sum_{s=1}^{\infty} \dot{q}_s^2 \quad (2)$$

梁の歪エネルギー V は

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{s=1}^{\infty} s^4 q_s^2 \quad (3)$$

一般力 Q_s

総重量 W の車輛が通過する際には、梁に $W\ddot{y}/g$ の慣性力が作用するはずである。今、自動車の上下方向の加速度を $\ddot{y}$ とすると、慣性力を考えた一般力 Q_s は次式で表されよう。

$$Q_s = W \sin \frac{S\pi Vt}{l} - \frac{W}{g} \ddot{\phi} \sin \frac{S\pi Vt}{l} \quad (4)$$

以上をLagrangeの運動方程式に代入して整理すると

$$\ddot{a}_s + n_s^2 a_s = \frac{2gW}{wl} \sin \frac{S\pi Vt}{l} - \frac{2W}{wl} \sin \frac{S\pi Vt}{l} \ddot{\phi} \quad (5)$$

$$n_s^2 = \frac{S^4 \pi^4 c^2}{l^4}, \quad c^2 = \frac{EIg}{W}, \quad (n_s \text{ は } S \text{ 次の固有円振動数を表す。})$$

減衰作用を考慮する場合は、 S 次の減衰定数を h_s とすると

$$\ddot{a}_s + 2h_s n_s \dot{a}_s + n_s^2 a_s = \frac{2gW}{wl} \sin \frac{S\pi Vt}{l} - \frac{2W}{wl} \sin \frac{S\pi Vt}{l} \ddot{\phi} \quad (6)$$

(6) 式右辺の才1項までを考えれば、これは車輛重量の慣性力を無視した場合の振動の基本方程式にはかわらない。(6) 式に数値を代入して時々刻々積分することにより、 $y = \sum a_s Y_s$ から理論的に梁の変位を求めることが出来る。著者等は、後に述べるスペクトル解析によって求めた結果と比較検討する意図から、(6) 式についてModal analysisを利用し、一次について次の諸値を与えて計算を行った。

$$h_1 = 0.05, \quad n_1 = 20.3, \quad W = 1.88 \text{ t/m}, \quad l = 44.20 \text{ m}, \quad W = 1.30 \text{ t}, \quad g = 9.80 \text{ m/s}^2,$$

$$V = 19.40 \text{ km/h}, 23.97 \text{ km/h}, 30.54 \text{ km/h}, 34.15 \text{ km/h}, 39.98 \text{ km/h}, 43.01 \text{ km/h}, \dots \text{etc.}$$

$\ddot{\phi}$ は測定データより0.02秒刻みで与える。

*この結果については、席上で発表します。

4. 不規則外力と系の応答について

unit pulse が δt 時間作用した時の系の応答を $h(t)$ とすれば、不規則な外力 $f(t)$ が作用する場合の系の応答 $y(t)$ は、
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot f(\tau) d\tau \quad (7)$$

両辺をフーリエ変換して

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) d\tau \cdot f(\tau) \right\} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right\} d\tau \quad (8)$$

$\eta = t - \tau$ として変数変換すると

$$Y(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-i\omega \eta} d\eta = F(i\omega) \cdot H(i\omega) \quad (9)$$

上式の両辺に各々の共役複素数をかけて T で割ると

$$\frac{|Y(i\omega)|^2}{T} = |H(i\omega)|^2 \cdot \frac{|F(i\omega)|^2}{T} \quad (10)$$

$$|Y(i\omega)|^2/T = S_y(\omega), \quad |F(i\omega)|^2/T = S_f(\omega) \text{ とおくと } S_y(\omega) = |H(i\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) \quad (11)$$

$$\text{応答 } y(t) \text{ の 2 乗平均は } \overline{y^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) d\omega \quad (12)$$

つまり、系に働く不規則外力のパワースペクトル密度函数 $S_f(\omega)$ と、その系の周波数応答函数 $|H(i\omega)|$ がわかると、系の応答の2乗平均が求まる。

本研究では簡単な為に系を一質点系としたが、次に不規則外力による一質点系の応答函数を求める。

$$\ddot{a}_s + 2h_s n_s \dot{a}_s + n_s^2 a_s = -\beta_s \ddot{\phi} \quad (13) \text{ の解は}$$

$$a_s = \beta_s a_{s0}, \quad a_{s0} = \frac{-1}{n_s^2 - h_s^2} \int_0^t \ddot{\phi}(\tau) e^{h_s n_s(t-\tau)} \sin \sqrt{n_s^2 - h_s^2} n_s(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

ここに a_{s0} は振動数 n_s 、減衰定数 h_s をもつ一質点系の応答と同じである。

自動車加速度 ϕ が正弦波で与えられる時は、 $\ddot{\phi} = \alpha e^{i(\omega t + \psi)}$ とおいて

$$a_{s0} = \frac{-1}{n_s^2 - \omega^2 + i2h_s n_s \omega} \cdot \alpha e^{i(\omega t + \psi)}$$

$$\ddot{a}_{s0} = \frac{\omega^2}{n_s^2 - \omega^2 + i2h_s n_s \omega} \cdot \alpha e^{i(\omega t + \psi)}$$

よって一次の場合の変位応答函数は

$$H(i\omega)_d = \frac{-1}{\pi^2 - \omega^2 + i2h\pi\omega} \quad (17)$$

$$|H(i\omega)_d|^2 = \frac{1}{\pi^4 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + 4h^2 \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \right]} \quad (18)$$

同じく一次の加速度応答函数は

$$H(i\omega)_a = \frac{\omega^2}{\pi^2 - \omega^2 + i2h\pi\omega} \quad (19)$$

$$|H(i\omega)_a|^2 = \frac{\omega^4}{\pi^4 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + 4h^2 \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \right]} \quad (20)$$

5. 測定結果の例

香椎跨線橋に於る実験で得られた自動車加速度、橋梁加速度の最大値及び橋梁の $\frac{1}{2}$ 尺、 $\frac{1}{4}$ 尺に於る変位の最大値の教例を次表に示す。なお橋台の変位はほとんど0であった。

○自動車加速度

○橋梁加速度

○橋梁 $\frac{1}{2}$ 尺変位

○橋梁 $\frac{1}{4}$ 尺変位

速度 V km/h	gal
19.40	83
30.84	112
34.15	126
39.98	151

速度 V km/h	gal
17.84	128
26.70	191
35.84	115
48.51	128

速度 V km/h	mm
20.40	1.62
23.82	1.41
28.31	1.22
38.43	1.16

速度 V km/h	mm
22.67	0.60
31.70	0.96
38.62	0.66
44.95	1.17

6. スペクトル解析

Fig-2(a)は実験データから得た自動車加速度の自己相関函数、(b)はスペクトル密度である。このスペクトル密度 $S_f(\omega)$ より $\bar{y}_d = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(i\omega)_d|^2 S_f(\omega) d\omega$ の關係を使って変位応答の標準偏差を求めると、 $\bar{y}_d = 0.97$ mmである。

他の速度について同じく標準偏差を求めると次のとおり。

$$V = 19.40 \rightarrow \bar{y}_d = 0.61 \text{ mm}, \quad V = 30.84 \rightarrow \bar{y}_d = 0.65 \text{ mm},$$

$$V = 34.15 \rightarrow \bar{y}_d = 0.60 \text{ mm}, \quad V = 39.98 \rightarrow \bar{y}_d = 0.86 \text{ mm},$$

Fig-3(a)は $\frac{1}{2}$ 尺に於る変位のスペクトル密度 $S_y(\omega)$ である。

$\bar{y}_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_y(\omega) d\omega$ より標準偏差を求めると、 $\bar{y}_a = 0.31$ mm

他の速度について同じく標準偏差を求めると次のとおり。

$$V = 20.40 \rightarrow \bar{y}_a = 0.37 \text{ mm}, \quad V = 23.82 \rightarrow \bar{y}_a = 0.31 \text{ mm},$$

$$V = 28.31 \rightarrow \bar{y}_a = 0.28 \text{ mm},$$

Fig-3(b)は $\frac{1}{2}$ 尺に於る変位の自己相関函数である。

Fig-4(a)は橋梁加速度のスペクトル密度 $S_{fb}(\omega)$ である。

$\bar{y}_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{fb}(\omega) d\omega$ より標準偏差を求めると、 $\bar{y}_a = 14.7$ gal

他の速度について同じく標準偏差を求めると次のとおり。

$$V = 17.84 \rightarrow \bar{y}_a = 27.6 \text{ gal}, \quad V = 26.70 \rightarrow \bar{y}_a = 31.2 \text{ gal},$$

$$V = 35.84 \rightarrow \bar{y}_a = 11.4 \text{ gal},$$

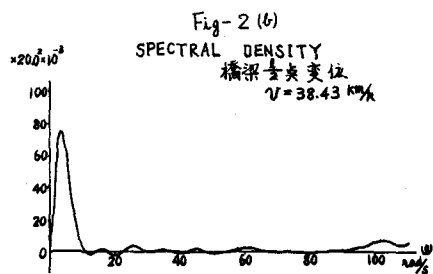
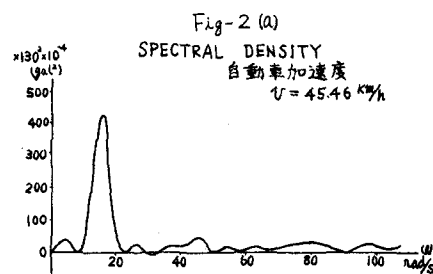
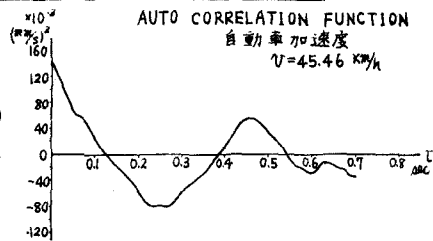


Fig-3 (a)

Fig-4 (b)は橋梁加速度の自己相関函数である。

Fig-2 (b)の自動車加速度のスペクトル密度 $S_f(\omega)$ を使って、 $\bar{y}_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega$ の関係から加速度応答の標準偏差を求めると、 $\bar{y}_a = 125.3 \text{ gal}$ となる。

他の速度について同じく標準偏差を求めると次のとおり。

$$V = 20.51 \rightarrow \bar{y}_a = 56.0 \text{ gal}, \quad V = 25.50 \rightarrow \bar{y}_a = 55.2 \text{ gal},$$

$$V = 37.00 \rightarrow \bar{y}_a = 70.5 \text{ gal},$$

理論式 $S_f(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega)$ は、以上の結果から考える限り、一次については実際とうまく合致しない。これは統計論が現象の定常性に立脚しているため、本例のような非定常現象には誤差が多くなるものと思われる。

7. 結語

(1) Fig-2 (b)について。スペクトル密度は理論的には正でないけれども、著者等がALGOL-H型電子計算機を使って求めた結果負の値していた。これは恐らく実験の不手際に伴う誤差及び、与えられた誤差などによるものと思う。

(2) Fig-3 (a)にみるように、自己相関函数が正の領域だけで示されるものもある(橋梁加速度の自己相関函数のみに現れた)が、これは非定常な波形を定常な波形として処理したところに原因するものと考えられる。したがって、移動平均法等により定常な波形にしておく必要であろう。

(3) 変位応答スペクトルの2乗平均、及び加速度応答の2乗平均が比較的大きな値を示しているが、これは系を一質点系として扱ったことや、2次以上の高次の振動を考慮していないこと等によるものと考えられる。ここに例示していないが、他の自動車速度 V に於る自動車加速度のスペクトル密度のいくつかには、2次($n=80.5$)の近傍で極めて卓越しているのが認められる。Fig-4 (a)の橋梁加速度のスペクトル密度では、明らかに2次($n=80.5$)が現れているといえよう。著者等が行った実験の結果、26組の自動車加速度のスペクトル密度のうち、18組までが1次及び2次の近傍で卓越しており、橋梁加速度のスペクトル密度については、そのほとんどが2次の近傍でのみ著しく卓越しているのが認められた。

参考文献

- 岡本舜三：建設技術者のための振動学
- 田治見宏：建築振動学，建築構造講座11巻
- 安芸敬一：変動現象，初等物理学講座B-5

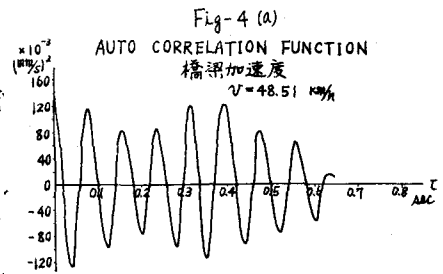
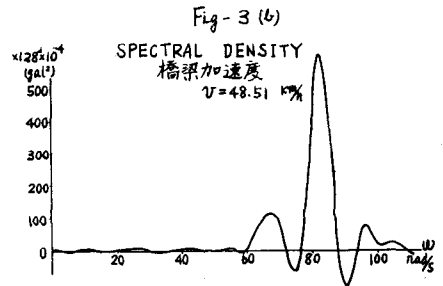
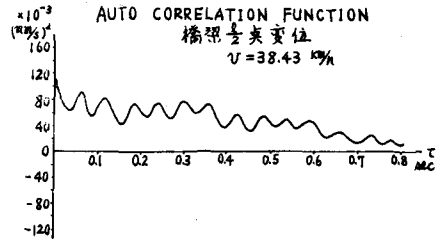


Fig-4 (b)