II-1　橋梁の捩れ振動

九州大学工学部　正員　小坪清真
学生員　原田譲二
学生員○橋本和治

1. まえがき

えびの地震による構造物の被害のうち特に橋梁について言えば，橋桁ピン部周囲のコンクリートに亀裂を生じ破壊したものがある。これは従来の震度法で扱う以外の相当大きな力が作用したものと考えられる。即ち従来の震度法とは，地震の作用下にある構造物の動的状態を静的な状態に仮想的に置き換えて取り扱うものであり，この様な考え方は橋桁が捩れ振動をしていない即ち橋桁を支持する2本の橋脚の剛性が同一であると見なせる場合にのみ用いる事ができ，橋脚頭部には橋軸直角方向にせん断力のみが作用するとみなしている。しかし実際の橋梁においては，①橋脚の高さ，②橋脚形状の相異，③橋脚基礎部における水平及び垂直地盤反力係数の相異，等々により橋脚相互の間の剛性は異なり，橋桁は捩れ振動を起こし，頭部にはせん断力以外に捩りモーメントが生ずると考えられる。

本研究においては，③の地盤反力係数の相異により橋脚間の剛性が異るものとして橋桁の捩れ振動を取扱い，従来までの震度法との比較を行ったものである。

2. 計算に用いた橋脚及び橋桁

本計算においてはモデルとして，図-1に示すような橋脚，橋桁を用いた。橋脚1，橋脚2は形状は全く同じで，基礎部における地盤反力係数によって剛性が異るものとする。

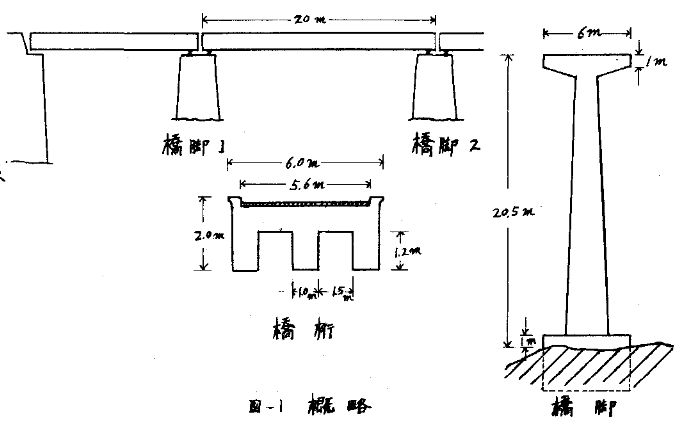

図-1　概略

3. 振動方程式

橋桁が図-2のよう　水平運動をする時，

u：基礎地盤の地震動

x：地盤に対する橋脚(剛性)の相対変位

θ：橋桁重心のまわりの回転角　　とすると，

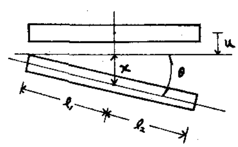

図-2

i) 水平方向変位に対する運動方程式は，

$$\frac{W}{g}(\ddot{x}+\ddot{u}) = -k_1\left(x-\frac{l_1}{2}\theta\right) - k_2\left(x+\frac{l_2}{2}\theta\right) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ii) 回転に対する運動方程式，

$$\frac{I}{g}\ddot{\theta} = -k_1'\theta - k_2'\theta - k_1\left(x-\frac{l_1}{2}\theta\right)\cdot\frac{l_1}{2} - k_2\left(x+\frac{l_2}{2}\theta\right)\cdot\frac{l_2}{2} \quad \cdots\cdots (2)$$

橋脚の固有振動周期及び振動型は(1)式で，$\ddot{u}=0$とおいた式より求められる。即ち，

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = -k_1\left(x - \frac{l_1}{2}\theta\right) - k_2\left(x + \frac{l_2}{2}\theta\right) \quad \cdots\cdots (1)'$$

$x = A_1 \cdot e^{int}$, $\theta = A_2 \cdot e^{int}$ を (1)' (2) に代入すると,

$$\left(\frac{W}{g}n^2 - k_1 - k_2\right)A_1 + \left(\frac{k_1 l_1}{2} - \frac{k_2 l_2}{2}\right)A_2 = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\left(\frac{k_1 l_1}{2} - \frac{k_2 l_2}{2}\right)A_1 + \left(\frac{I}{g}n^2 - k_1' - k_2' - \frac{k_1 l_1^2}{4} - \frac{k_2 l_2^2}{4}\right)A_2 = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

故に, 振動数方程式は,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{W}{g}n^2 - k_1 - k_2\right) & \left(\frac{k_1 l_1}{2} - \frac{k_2 l_2}{2}\right) \\ \left(\frac{k_1 l_1}{2} - \frac{k_2 l_2}{2}\right) & \left(\frac{I}{g}n^2 - k_1' - k_2' - \frac{k_1 l_1^2}{4} - \frac{k_2 l_2^2}{4}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

これより, 固有円振動数 n_1, n_2 が求まる。

この時の振動型を求める。

橋桁の振動は「水平振動」と「回転振動」の合成であるから, どこか動かない点ー振れ中心がある。振動型そのものは直線であるから, けっきょくこの振れ中心の位置さえ求めればよい。振れ中心はn_1に対するもの, 即ち1次の振れ中心とn_2に対するもの, 即ち2次の振れ中心とがある。各々の位置N_1, N_2を重心からはかって z_1, z_2とすれば, (3) (4) 式より,

$z_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_{n=n_1}$, $z_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_{n=n_2}$ 各値を代入して振動型を求めると図ー3のようになる。

次に, (1) (2) 式を変形するとこの振れ振動の振動方程式は,

$$\frac{W}{g}\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(k_1 l_1 - k_2 l_2) = -\frac{W}{g}\ddot{u} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\frac{I}{g}\ddot{\theta} - \frac{1}{2}(k_1 l_1 - k_2 l_2)x + \left(k_1' + k_2' + \frac{k_1 l_1^2}{4} + \frac{k_2 l_2^2}{4}\right)\theta = 0 \quad \cdots\cdots (7)$$

(6) (7) をマトリクス記号を用いて,

$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \{y\}$, $\begin{bmatrix} \frac{W}{g} & 0 \\ 0 & \frac{I}{g} \end{bmatrix} = [m]$, $\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -\frac{1}{2}(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -\frac{1}{2}(k_1 l_1 - k_2 l_2) & \left(k_1' + k_2' + \frac{k_1 l_1^2}{4} + \frac{k_2 l_2^2}{4}\right) \end{bmatrix} = [k]$, $\begin{bmatrix} -\frac{W}{g}\ddot{u} \\ 0 \end{bmatrix} = \{P\}$ とすると,

$$[m]\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = \{P\} \quad \cdots\cdots (8)$$

固有ベクトルを1, 2次に対し各々$\{X_1\}$, $\{X_2\}$とし, (8)式の解を $\{y\} = \sum_{j=1}^{2} q_j\{X_j\}$ とおけば, (8)式は,

$$[m]\sum_{j=1}^{2}\ddot{q}_j\{X_j\} + [k]\sum_{j=1}^{2}q_j\{X_j\} = \{P\} \quad \cdots\cdots (9)$$

そして $\{X_k\}^T$ $(k=1, 2)$ を前から掛け, 直交条件に留意すれば次式を得る。

$$M_j\ddot{q}_j + K_j q_j = R_j \quad (j=1, 2) \quad \cdots\cdots (10)$$

但し, $\begin{cases} M_j = \{X_j\}^T[m]\{X_j\} \\ K_j = \{X_j\}^T[k]\{X_j\} \\ R_j = \{X_j\}^T\{P\} \end{cases}$

(10)式を更に整理して,

$$\ddot{q}_j + n_j^2 q_j = \beta_j \ddot{\varphi}(t) \quad \cdots\cdots (10)'$$

ところで変位成分は(9)式から，

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = g_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/z_1 \end{bmatrix} + g_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{g_1}{z_1} \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{g_2}{z_2} \begin{bmatrix} z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{---------- (11)}$$

で与えられるから，

$g_1/z_1 = \theta_1$ は一次振れ中に回りの回転角

$g_2/z_2 = \theta_2$ は二次 〃 〃 を意味する。

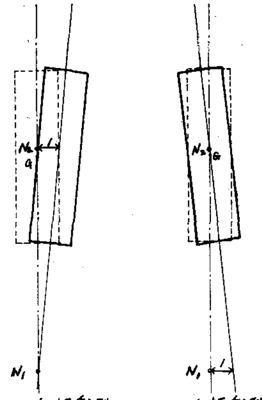

図-3 振動型

4。応答計算

橋脚頭部(支承部分)に作用するせん断力，捩りモーメントを求める。(図-4)

(1) せん断力

i) 橋桁の回転に対して橋脚1，〃2の頭部に作用するせん断力 X_1, X_2 は，

$X_1 = l_1 \theta k_1$

$X_2 = -l_2 \theta k_2$

ii) 橋桁の並進運動に対して橋脚1，〃2の頭部に作用するせん断力 X_1', X_2' は，

$X_1' = k_1 u$

$X_2' = k_2 u$

(i)(ii) より橋脚1，〃2の頭部に作用するせん断力 S_1, S_2 は次式より求まる。

$S_1 = X_1 + X_1' = (l_1 \theta + u) k_1$

$S_2 = -X_2 + X_2' = (-l_2 \theta + u) k_2$

(2) 捩りモーメント

橋脚1，〃2の頭部に作用する捩りモーメント M_1, M_2 は次式より求まる。

$M_1 = k_1' \theta$

$M_2 = k_2' \theta$

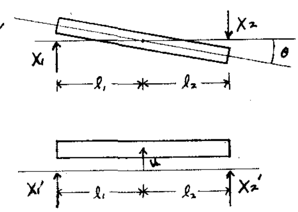

図-4

5。数値計算に用いた橋脚

i) 橋脚のバネ定数

橋脚の橋軸直角方向変位及び捩りに対するバネ定数は，橋脚頭部に単位水平力及び単位捩りモーメントを作用させ，その変位及び捩り角より求めた。

この場合，地盤反力係数が影響し，各係数を表-1のように仮定した。

表-1 地盤反力係数

	橋脚 1	橋脚 2
k_v (kg/cm³)	50	40
k_h (〃)	35	28

表-2 バネ定数

	橋脚 1	橋脚 2
k (t/m)	2.994×10^3	2.762×10^3
k' (t-m)	1.268×10^5	1.217×10^5

ii) 橋桁に付加する橋脚の重量

水平振動(橋軸直角)に及ぼす橋脚の影響(図-5)

水平振動時に橋脚が変形した時の運動エネルギーと橋脚を一質点系とし質点が同量の変形を起した場合の運動エネルギーを求める。次にこの両運動エネルギーが等しくなるように一質点系の重量を決しこれを桁に付加させて橋脚の影響とする。

$K_1 = \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{n} W_i \dot{y}_i^2$ ，　$K_2 = \frac{1}{2g} W \cdot \dot{y}_1^2$

$K_1 = K_2$ より，付加重量 W_i' は　，$W_i' = \frac{1}{\dot{y}_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \dot{y}_i^2\right)$

桁の重量を W_1 とすると，

$W = W_1 + W_1' + W_2' = 766.452$ t

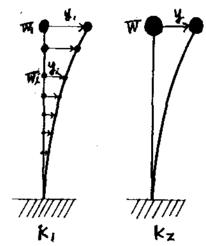

図-5

iii) 橋桁重心に関する慣性モーメント　$I = 57032.902\ m^4$

iv) 振動率(n)，刺激係数(β)，ζ

表-3

	n_j	β_j	ζ_j
1次	8.571	−0.998	193
2次	12.262	−0.002	−0.39

v) その他

付加重量の影響により重心の位置がずれる。(表-4)

表-4

l_1 (m)	10.037
l_2 (〃)	9.963

6。結果に対する考察

・(10)の $\ddot{\varphi}(t)$ に既往のEL Centro地震波(最大加速度 0.33g)を採用すると，橋脚1，〃2の頭部に作用するせん断力(橋軸直角方向)，捩りモーメント S_1, S_2, M_1, M_2 は図-6のようになった。

図から，5秒以降，せん断力が大きくなるのは減衰項を考えなかったからであろう。

次に，0.3gなる加速度が水平方向に静的にかかるとピンに作用するせん断力は，$S_{static}=115$ t となる。一方図-6より最大せん断力 $=249$ t であり，これ以外に捩りモーメントが橋軸方向に作用するので，せん断力と捩りモーメントの合力は S_{static} より大となる。

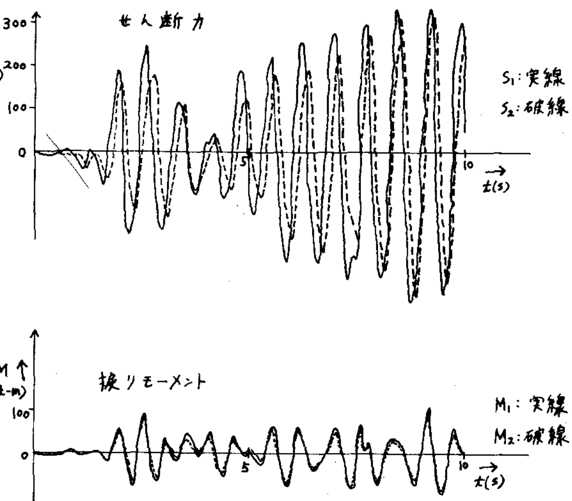

図-6

故に橋梁を設計する場合，橋脚相互の剛性の相異を考慮に入れ，橋軸直角方向の捩れ振動を考えなければならない事が明らかになった。