

I-23

十字形および正多角形断面棒のねじり解析

九州大学 正員 山崎 徳也

学生員 後藤 恵之輔

学生員 中 沢 隆雄

1.序 棒すなわち柱体の弾性ねじり問題は、古くより研究され解析し尽くされた親があるが、隅を丸めた十字形断面棒や多角形断面棒などに関し¹⁾ては著者の知るかぎり少なく、²⁾ゆずかに半沢・石川氏による³⁾し、⁴⁾十字形断面棒の、⁵⁾中野・荻野氏による隅を丸めた正方形断面棒のねじり解析が認められるにすぎない。さらに前者のねじり解析においては凹隅角部の丸味のみの考慮され、凸隅角部のそれは加味されていないので、これがねじり応力に及ぼす影響を及ぼすかは未知の問題で興味深い。本論は、著者が先に発表した写像法を用いて十字形断面棒および正多角形断面棒のねじり応力式を誘導したもので、算例により隅を丸めた正多角形断面棒における隅角部の丸味の影響を吟味検討した。なお式の誘導に当り正多角形断面棒の例としては正五角形をえらんだ。

2.写像函数 図-1(a)に示すごとくZ面上の原点に中心を有する隅を丸めた十字形Kの写像函数は、KがX, Y軸および $y=x$ に関して対称であることを考慮すれば文献(3)の手法より次式のごとく求められる。

$$Z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N a_n S^n \quad \text{----- (1)}$$

ここに a_n : 実数, N : 正整数

また図-1(b)のごとくY軸に関して対称な隅を丸めた正五角形Lの写像函数も同様にして次式で与えられることとなる。

$$Z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N a_n S^n + i \sum_{n=2,4,6,\dots}^{N+1} a_n S^n \quad \text{----- (2)}$$

式(1)および式(2)を展開し、実数部と虚数部とをそれぞれ等置して $\alpha=0$ とすれば、十字形断面棒および正五角形断面棒の境界を定義する式がそれぞれ次のごとくえられる。

$$\text{十字形断面: } x = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N a_n \cos n\beta, y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N a_n \sin n\beta \quad \text{----- (3)}$$

$$\text{正五角形断面: } x = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N a_n \cos n\beta - i \sum_{n=2,4,6,\dots}^{N+1} a_n \sin n\beta, y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N a_n \sin n\beta + i \sum_{n=2,4,6,\dots}^{N+1} a_n \cos n\beta \quad \text{----- (4)}$$

式(3)および式(4)中の係数 a_n を決定する条件は、これらの式で定義される曲線が任意の曲率半径を有する十字形断面棒および正五角形断面棒の境界上に一連の点を通過することで、これら諸点をそれぞれ図-2(a), (b)に示すごとくえらべば、各点の座標値は次のとおりである。

十字形断面 (図-2(a)):

$$\left. \begin{aligned} x_1=0.5, y_1=0; x_2=0.5, y_2=0.14/3; x_3=0.5, y_3=2.014/3 \\ x_4=0.14+Y \cos \theta_4, y_4=0.14+Y \sin \theta_4; x_5=0.14+Y \cos \theta_5, y_5=0.14+Y \sin \theta_5 \\ x_6=0.14+Y \cos \theta_6, y_6=0.14+Y \sin \theta_6; x_7=(3A_x+B_x)/4, y_7=t \\ x_8=(A_x+B_x)/2, y_8=t; x_9=(A_x+3B_x)/4, y_9=t \\ x_{10}=0.2x+Y \sin \theta_{10}, y_{10}=0.2y+Y \cos \theta_{10}; x_{11}=0.2x+Y \sin \theta_{11}, y_{11}=0.2y+Y \cos \theta_{11} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5)}$$

ただし $0.14=0.5-Y, 0.14=t-Y; 0.2x=0.2y=t+Y; A_x=0.5-Y, y=t; B_x=t+Y, y=t$

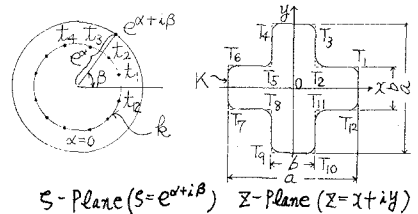


図-1 (a)

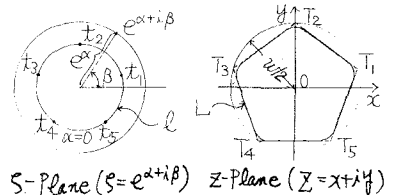


図-1 (b)

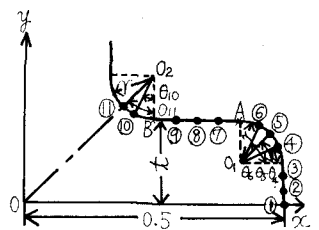


図-2 (a)

正五角形断面(図-2(b)):

$$\left. \begin{aligned} x_1=0, y_1=-\cos \frac{\pi}{5}; x_2=0.2, y_2=-\cos \frac{\pi}{5}; x_3=0.2x+Y \sin \theta_3, y_3=0.2y+Y \cos \theta_3; x_4=0.2x+Y \sin \theta_4, y_4=0.2y+Y \cos \theta_4 \\ x_5=0.2x+Y \sin \theta_5, y_5=0.2y+Y \cos \theta_5; x_6=(A_2+B_2)/4, y_6=(A_2+B_2)/4; x_7=(A_2+B_2)/4, y_7=(A_2+B_2)/4; x_8=(A_2+B_2)/4, y_8=(A_2+B_2)/4 \\ x_9=0.2x+Y, y_9=0.2y; x_{10}=0.2x+Y \cos \theta_{10}, y_{10}=0.2y+Y \sin \theta_{10}; x_{11}=0.2x+Y \cos \theta_{11}, y_{11}=0.2y+Y \sin \theta_{11}; x_{12}=(3C_2+D_2)/4, y_{12}=(3C_2+D_2)/4 \\ x_{13}=(C_2+D_2)/2, y_{13}=(C_2+D_2)/2; x_{14}=(C_2+D_2)/4, y_{14}=(C_2+D_2)/4; x_{15}=Y \sin \theta_{15}, y_{15}=0.2y+Y \sin \theta_{15}; x_{16}=0, y_{16}=0.2y+Y \\ \text{また } Q_x=\sin \frac{\pi}{5}(1.0-Y \cos \frac{\pi}{5}), Q_y=Y \cos \frac{\pi}{5}; O_{2x}=\cos \frac{\pi}{10}(1.0-Y \cos \frac{\pi}{5}), O_{2y}=\sin \frac{\pi}{10}(1.0-Y \cos \frac{\pi}{5}) \\ O_{3y}=1.0-Y \cos \frac{\pi}{5}; A_x=0.2x+Y \cos \frac{\pi}{10}, A_y=0.2y+Y \sin \frac{\pi}{10}; B_x=0.2x+Y \cos \frac{\pi}{10}, B_y=0.2y+Y \sin \frac{\pi}{10} \\ C_x=0.2x+Y \cos \frac{3\pi}{10}, C_y=0.2y+Y \sin \frac{3\pi}{10}; D_x=Y \sin \frac{\pi}{5}, D_y=0.2y+Y \cos \frac{\pi}{5} \end{aligned} \right\} (6)$$

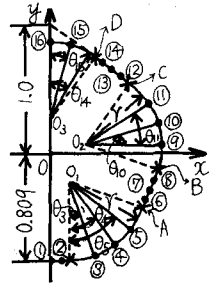


図-2 (b)

式(5)を式(3)に, 式(6)を式(4)にそれぞれ代入すれば α_n および β_n を未知数とする非線型多元連立方程式がえられるが, これらの解は Newton の反復解法により電子計算機を用いて容易かつ自動的にえられるものである。なお図-2(a), (b)のごとく点をとれば N はそれぞれ 41 および 15 となる。

3. 基礎方程式 柱体のねじり問題に式(8), (9)で示される平衡方程式および境界条件を満足する複素ねじり函数

$$F(z) = \varphi + i\psi \quad (\psi: \varphi \text{ の共役函数}) \quad \text{--- (7)} \quad \text{を求めることに帰着する。}$$

すなわち $\Delta \varphi = 0$ (断面内部において) --- (8), $\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const}$ (境界上において) --- (9)

$$\text{式(1), (2)により } \varphi \text{ の函数として定義される写像函数を一般に } Z = \omega(\zeta) \quad \text{--- (10)}$$

$$\text{とおけば式(7)は次のごとくなる。} \quad F(z) = F[\omega(\zeta)] = f(\zeta) = \varphi + i\psi \quad \text{--- (11)}$$

ここで, 式(9)の境界条件式を複素数表示するために式(11)より次式をうる。

$$\psi = -\frac{1}{2}[f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)] \quad \text{ここに } \bar{f}(\zeta) \text{ は } f(\zeta) \text{ の共役函数} \quad \text{--- (12)}$$

式(12)を式(9)に代入して式(10)を考慮すれば境界条件式は結局次式としてえられる。

$$f(\sigma) - \bar{f}(\sigma) = i \omega(\sigma) \cdot \overline{\omega(\sigma)} + \text{const} \quad \text{ここに } \sigma = \zeta|_{\alpha=0} = e^{i\beta} \quad \text{--- (13)}$$

次に (x, y) 座標における応力成分 τ_{xz}, τ_{yz} は θ, θ をそれぞれせん断弾性係数および単位長さ当りのねじり角として次式で与えられる。

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\theta \left[\frac{\partial F(z)}{\partial z} - i\bar{z} \right] \quad \text{--- (14)}$$

$$\text{式(14)に式(10)および式(11)を代入すれば次式がえられる。} \quad \tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\theta \left[\frac{f'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - i\bar{\omega}(\zeta) \right] \quad \text{--- (15)}$$

一応, (α, β) 座標における応力成分 τ_α, τ_β と (x, y) 座標における τ_x, τ_y との関係は次式で与えられる。

$$\tau_\alpha - i\tau_\beta = \frac{5}{\rho} \frac{\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}(\zeta)} (\tau_{xz} - i\tau_{yz}) \quad \text{--- (16)} \quad \text{ここに } \rho = e^{\beta}, |\omega'(\zeta)| = \sqrt{\omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}} \quad \text{--- (17)}$$

したがって式(16)に式(15)を代入して τ_α, τ_β は次式のごとくなる。

$$\tau_\alpha - i\tau_\beta = \frac{5}{\rho} \frac{G\theta}{|\omega'(\zeta)|} [f'(\zeta) - i\omega'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}] \quad \text{--- (18)}$$

すなわち写像函数 $Z = \omega(\zeta)$ を決定できれば式(13)よりねじり函数 $f(\zeta)$ が求られ, これを用いて式(18)より所要の応力成分 τ_α, τ_β が決定されることとなる。

4. ねじり応力式 (1) 十字形断面棒の場合 対称複素ねじり函数を決定するために式(1)を用いて次の展開をおこなう。

$$\omega(\sigma) \cdot \overline{\omega(\sigma)} = \sum_{n=1,3,5}^N a_n \sigma^n \cdot \sum_{n=1,3,5}^N \bar{a}_n \bar{\sigma}^n = \sum_{n=N+1, N+3, N+5}^{N-1} A_n \sigma^n \quad \text{--- (19)}$$

$$\text{ここに } A_0 = a_0^2 + a_{N+4}^2 + a_{N+8}^2 + \dots + a_1^2, A_4 = a_{N+4}a_{N+8} + a_{N-8}a_{N-4} + a_{N+12}a_{N-8} + \dots + a_1a_5, \dots,$$

$$A_{N-1} = a_1a_N \quad (A_{-n} = A_n)$$

$$\text{(16)より複素ねじり函数は式(13)を参照して次のごとくおきうる。} \quad f(\zeta) = \sum_{n=0,4,8}^{N-1} b_n \zeta^n \quad \text{--- (20)}$$

式(19)と式(20)とを式(13)に代入すれば次式がえられる。

$$\sum_{n=0,4,8}^{N-1} b_n \sigma^n \cdot \sum_{n=0,4,8}^{N-1} \bar{b}_n \bar{\sigma}^n = i \sum_{n=N+1, N+3, N+5}^{N-1} A_n \sigma^n + \text{const} \quad \text{--- (21)} \quad \text{ここに } \bar{b}_n \text{ は } b_n \text{ の共役函数}$$

式(21)において $\cos \alpha = 0$ とし両辺の α の同べき数の係数を比較することにより b_n が求められる。(1)から複素値じり函数として次式がえられることとなる。 $f(s) = i \sum_{n=4,8,12}^{N-1} b_n'' s^n$ ことに $b_n'' = A_n$ --- (22)

次に応力を求めるために式(18)の $\omega(s)$ を展開すれば次式の如くとなる。

$$\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)} = \sum_{n=1,5,9}^N C_n (\cos n\beta - i \sin n\beta) + \sum_{n=3,7,11}^{N-2} C_n' (\cos n\beta + i \sin n\beta) \quad \text{--- (23)}$$

$$\text{ここに } C_1 = a_1^2 e^{\alpha} + 5a_5^2 e^{5\alpha} + \dots + i a_n e^{(2N-1)\alpha}, \quad C_3 = a_3 a_5 e^{3\alpha} + 5a_5 a_7 e^{7\alpha} + \dots + (N-4)a_{N-4} a_N e^{(2N-5)\alpha}, \quad C_5 = a_5 a_7 e^{5\alpha} + 7a_7 a_9 e^{9\alpha} + \dots + N a_{N-2} a_N e^{(2N-3)\alpha}, \quad C_7 = a_7 a_9 e^{7\alpha} + 9a_9 a_{11} e^{11\alpha} + \dots + N a_{N-4} a_N e^{(2N-1)\alpha}, \quad C_{N-2} = N a_{N-4} a_N e^{N\alpha}$$

よって $f(s)$ は式(22)より次の如くえられる。

$$f(s) = i \sum_{n=4,8,12}^{N-1} n b_n'' s^{n-1} = \sum_{n=3,7,11}^{N-2} D_n (-\sin n\beta + i \cos n\beta) \quad \text{ここに } D_n = (n+1) b_{n+1}'' e^{n\alpha} \quad \text{--- (24)}$$

式(23)と式(24)とを式(18)に代入して両辺の実数部と虚数部とをそれぞれ等置することにより、応力成分 T_α, T_β が結局次式で与えられる。

$$T_\alpha = \frac{G\theta}{|\omega(s)|} \left[\sum_{n=3,7,11}^{N-2} F_n \sin(n+1)\beta - \sum_{n=1,5,9}^N C_n \sin(n-1)\beta \right], \quad T_\beta = \frac{G\theta}{|\omega(s)|} \left[\sum_{n=3,7,11}^{N-2} F_n \cos(n+1)\beta + \sum_{n=1,5,9}^N C_n \cos(n-1)\beta \right] \quad \text{--- (25)}$$

ここに $F_n = C_n' - D_n$ であり $|\omega(s)|$ は式(17)よりえられるもので、 $\beta \neq 0$ の $\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)}$ は次式の如くである。

$$\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)} = \sum_{n=1,5,9}^N n a_n s^{n-1} \cdot \sum_{n=1,5,9}^N n a_n \overline{s}^{n-1} = \sum_{n=1,5,9}^N E_{n-1} \cos(n-1)\beta \quad \text{--- (26)}$$

$$\text{ここに } E_0 = a_1^2 + 5a_5^2 e^{5\alpha} + \dots + N a_N^2 e^{(2N-1)\alpha}, \quad E_4 = 2 \{ 5a_4 a_5 e^{4\alpha} + 45a_5 a_7 e^{12\alpha} + \dots + N(N-4)a_{N-4} a_N e^{2(N-3)\alpha} \}$$

$$E_8 = 2 \{ 9a_8 a_9 e^{8\alpha} + 65a_9 a_{11} e^{16\alpha} + \dots + N(N-8)a_{N-8} a_N e^{2(N-5)\alpha} \}, \quad \dots, \quad E_{N-1} = 2N a_{N-1} a_N e^{(N-1)\alpha}$$

(2) 正五角形断面棒の場合 十字形断面棒の式(19)に対応して次式をうる。

$$\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)} = \sum_{n=-N+1, -N+3}^{N-1} X_n s^n + i \sum_{n=-N, -N+2}^N Y_n s^n \quad \text{--- (27)}$$

ここに $X_n = A_n + B_n, Y_n = C_n - D_n$ で A_n, B_n, C_n および D_n はそれぞれ a_n の函数である。

これより複素値じり函数は次式の如くおもう。

$$f(s) = \sum_{n=0,2,4}^{N-1} b_n'' s^n + \sum_{n=1,3,5}^N c_n'' s^n \quad \text{--- (28)}$$

(1) から十字形断面の場合と同様に式(27)と式(28)とを式(13)に代入することにより $f(s)$ が結局次の如く決定される。 $f(s) = i \sum_{n=2,4,6}^{N-1} b_n'' s^n + \sum_{n=1,3,5}^N c_n'' s^n$ ことに $b_n'' = X_n, c_n'' = -Y_n$ --- (29)

次に式(23)に対応して $\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)}$ は次式の如くとなる。

$$\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)} = \sum_{n=1,3,5}^N E_n (\cos n\beta - i \sin n\beta) + \sum_{n=1,3,5}^{N-2} E_n' (\cos n\beta + i \sin n\beta) + \sum_{n=0,2,4}^{N-1} F_n (\sin n\beta + i \cos n\beta) + \sum_{n=0,2,4}^{N-1} F_n' (\sin n\beta - i \cos n\beta) \quad \text{--- (30)}$$

ここに E_n, E_n', F_n および F_n' は式(23)の C_n, C_n' と同様 a_n および e^α の函数である。

よって式(29)より $f(s)$ は次の如くえられる。

$$f(s) = \sum_{n=1,3,5}^{N-2} G_n (-\sin n\beta + i \cos n\beta) + \sum_{n=0,2,4}^{N-1} G_n' (\cos n\beta + i \sin n\beta) \quad \text{--- (31)}$$

$$\text{ここに } G_n = (n+1) b_{n+1}'' e^{n\alpha}, \quad G_n' = (n+1) c_{n+1}'' e^{n\alpha}$$

(1) から式(30)と式(31)とを式(18)に代入して実数部と虚数部とをそれぞれ等置すれば所要の応力成分 T_α, T_β が次式で与えられる。

$$T_\alpha = \frac{G\theta}{|\omega(s)|} \left\{ \sum_{n=1,3,5}^{N-2} \{ (E_n' - G_n) \sin(n+1)\beta - E_n \sin(n-1)\beta \} + \sum_{n=0,2,4}^{N-1} \{ (G_n' - F_n) \cos(n+1)\beta + F_n \cos(n-1)\beta \} \right\}$$

$$T_\beta = \frac{G\theta}{|\omega(s)|} \left\{ \sum_{n=1,3,5}^{N-2} \{ (E_n' - G_n) \cos(n+1)\beta + E_n \cos(n-1)\beta \} - \sum_{n=0,2,4}^{N-1} \{ (G_n' - F_n) \sin(n+1)\beta - F_n \sin(n-1)\beta \} \right\} \quad \text{--- (32)}$$

ここに $|\omega(s)|$ は式(17)よりえられるもので式中の $\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)}$ は次式の如くである。

$$\omega(s) \cdot \overline{\omega(s)} = \sum_{n=0,2,4}^{N-1} H_n \cos n\beta + \sum_{n=1,3,5}^N H_n' \sin n\beta \quad \text{--- (33)}$$

ただし、式(33)における H_n および H_n' は式(28)における E_{n-1} と同様 a_n および e^α の函数である。

5. 計算例 (1) 正方形断面 この場合の写

像函数は十字形断面の場合と同様に式(1)で与えられその係数 $a_1 \sim a_{17}$ の値を表-1に示したが、これらの値を用いて式(4)よりえられる境界上のねじり応力分布は図-3

表-1 正方形断面棒の写像函数係数表

$\rho = \frac{r}{w}$	a_1	a_5	a_9	a_{13}	a_{17}	a_{21}	a_{25}	a_{29}	a_{33}	a_{37}
0.500	5.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.375	5.2347	-0.0275	-0.0666	-0.0434	-0.0132	-0.0332	-0.0237	-0.0046	-0.0022	-0.0002
0.325	5.3170	-0.0364	-0.0505	-0.0091	-0.0086	-0.0002	-0.0029	-0.0020	-0.0007	-0.0001
0.275	5.3517	-0.0425	-0.0141	-0.0264	-0.0013	-0.0028	-0.0015	-0.0002	-0.0001	-0.0001
0.225	5.3748	-0.0440	-0.0168	-0.0689	-0.0273	-0.0086	-0.0004	-0.0013	-0.0014	-0.0007
0.175	5.3868	-0.0234	-0.0203	-0.0447	-0.0592	-0.0358	-0.0173	-0.0119	-0.0062	-0.0027

のごとくである。境界上のねじり応力の最大値 T_{max} および最小値 T_{min} を半径比 $\rho_s = r/w$ (r : 隅半径, w : 断面幅)を変数として図-4に示す。図中2点鎖線は中原氏らの結果で本法とかなりよく一致することが認められる。

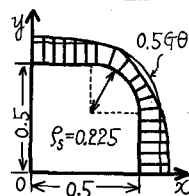


図-3

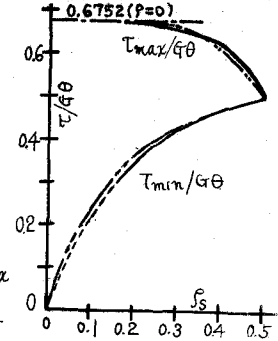


図-4

(2) 正五角形断面 この場合の写像函数は式(2)で与えられ、その係数 $a_1 \sim a_{16}$ を表-2に示すが、これらを式(2)

に代入してえられる境界上のねじり応力分布は図-5となる。境界上の T_{max} と T_{min} を $\rho_p = r/w$ (r : 隅半径, w : 隅に丸味がない正五角形の外接円の直径)を変

表-2 正五角形断面棒の写像函数係数表

$\rho = \frac{r}{w}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
0.8092	8.0902	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.725	8.2120	-0.0001	0	0	-0.0008	-0.0097	-0.0006	0	0	-0.0009	-0.0226	-0.0010	0	0	-0.0002	-0.0004
0.675	8.2694	-0.0001	0	0	-0.0007	-0.0159	-0.0006	0	0	-0.0003	-0.0210	-0.0004	0	0	-0.0001	-0.0001
0.625	8.3207	-0.0001	0	0	-0.0007	-0.0213	-0.0006	0	0	-0.0001	-0.0133	-0.0002	0	0	0	-0.0001
0.575	8.3666	-0.0001	0	0	-0.0006	-0.0288	-0.0006	0	0	0	-0.0002	-0.0001	0	0	0	-0.0001

図-6に示す。

(3) 正八角形断面 かかる断面の写像函数も正方形断面と同じく式(1)で表わされ、式中の係数 $a_1 \sim a_{25}$ は表-3のごとく決定される。これらを用いて式(4)よりえられる境界上のねじり応力分布は図-7となり図4、図6に対応して図-8をうる。

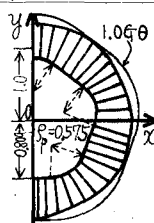


図-5

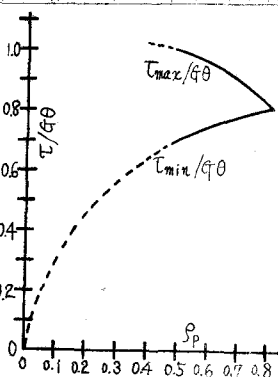


図-6

6. 結論 以上の計算結果より

表-3 正八角形断面棒の写像函数係数表

正多角形断面棒における隅の丸味がねじり応力に及ぼす影響は設計に際して問題となる T_{max} に対してさ程大きくないことが認められる。(したがって、十字形などの凹凸隅角部をもつ断面棒においても凸隅角部の丸味の影響は小さいと予測されるが、数値計算未完のため確言できず、今後の研究に俟たれう。

$\rho = \frac{r}{w}$	a_1	a_5	a_9	a_{13}	a_{17}	a_{21}	a_{25}
0.500	5.0000	0	0	0	0	0	0
0.475	5.0147	-0.0024	-0.0065	-0.0037	-0.0018	-0.0013	-0.0004
0.425	5.0369	-0.0002	-0.0293	-0.0003	-0.0058	-0.0001	-0.0018
0.375	5.0562	-0.0002	-0.0520	-0.0003	-0.0049	-0.0001	-0.0007
0.325	5.0730	-0.0002	-0.0740	-0.0003	-0.0010	-0.0001	-0.0021
0.275	5.0870	0	-0.0951	-0.0001	-0.0056	0	-0.0025
0.225	5.0978	0	-0.1143	-0.0001	-0.0155	0	-0.0010
0.175	5.1048	0	-0.1280	-0.0001	-0.0292	0	-0.0059
0.125	5.1078	0	-0.1213	-0.0001	-0.0467	0	-0.0332

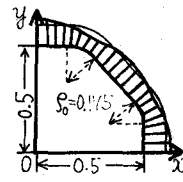


図-7

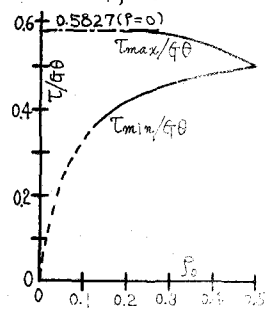


図-8

- 参考文献) 1) 半沢・石川: 機械学論文集, 44-258, 昭和43年2月.
2) 中原・世野: 第32期機械学会定時大会講演会前刷, 昭和30年2月.
3) 山崎・後藤: 九大工学集報, 41-5, 昭和43年10月.