

九州大学 正員 山崎 健也

" 正員 斎場 照

" 専任員 熊谷 浩一郎

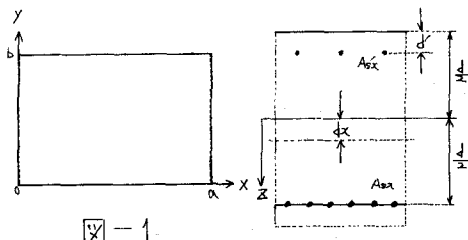
1. 緒言

鉄筋コンクリート構造物とは、コンクリートの乾燥収縮を鉄筋が防げるため、通常鉄筋には圧縮応力、コンクリートには引張応力をそれぞれ生じ、特に後者はひび割れ発生の危険をもたらしゆえ、その厳密な解析が必要である。はりに関しては既に理論が導かれ、設計においては一般に温度降下による換算して計算することが行われているが、鉄筋コンクリートスラブ（RCスラブと略す）の乾燥収縮応力については、これと理論的に取りあつた研究例が極めて少ない。坂・大車両氏は、鉄筋がスラブ厚さの中央に配置されているものと仮定して、クリープも考慮したRCスラブの自由収縮応力を二次元応力解析法により求めているが、通常のスラブでは、コンクリート断面の重心と鉄筋断面の重心とが合致すると言う上記仮定は必ずしも成立しない。したがって面内二次元応力に加えて曲げ応力を生じ、単鉄筋断面のように鉄筋の偏心率の大きい場合には、曲げ応力がはるかに卓越することとなる。

本研究は、一打立が単純支持された他打立が任意の境界条件を持つRCスラブについて、コンクリートの乾燥収縮にともなう曲げ応力の算定法を導き、コンクリートに生ずる引張応力の危険度を数値計算により吟味検討したものである。

2. 基礎微分方程式の誘導

図-1のごとく、相隣る二匹の長さそれぞれ a, b で有効高 d のRC矩形スラブを考える。有効高 d の中央面（頭後基準面と称す）内で二匹にそつて



x, y 軸を、すなわち右に垂直下向きに z 軸をとリ、鉄筋は x, y 両軸に平行に配置されるものとする。

コンクリートにおいて、 x, y 方向の応力およびひずみそれぞれ σ_x, σ_y および ϵ_x, ϵ_y 、せん断応力とせん断ひずみを τ_{xy}, γ_{xy} 、コンクリートの自由収縮ひずみを δ_m とすれば、次の応力-ひずみ関係式が成立する。

$$\sigma_x = \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ (\epsilon_x + \delta_m) + \nu (\epsilon_y + \delta_m) \}, \quad \sigma_y = \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ (\epsilon_y + \delta_m) + \nu (\epsilon_x + \delta_m) \}, \quad \tau_{xy} = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (1)$$

ここに、 E_c : コンクリートの弾性係数、 ν : コンクリートのポアソン比

スラブの z 方向のたわみ w とし、平面保持の仮定を用いれば、スラブの任意点 (x, y, z) における x, y 方向の垂直ひずみ ϵ_x, ϵ_y およびせん断ひずみ γ_{xy} が次式にて表わされる。

$$\epsilon_x = -(z - d_z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \delta_m, \quad \epsilon_y = -(z - d_y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \delta_m, \quad \gamma_{xy} = -2(z - \frac{d_x + d_y}{2}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

ただし、 d_x, d_y はそれぞれ x, y 軸に垂直な断面の中立軸の z 座標である。

式(2)を用いて、 x, y 方向の引張鉄筋応力 $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}$ および圧縮鉄筋応力 $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}$ を求めれば次の結果となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sx} &= E_s (\epsilon_x)_{z=\frac{d}{2}}, & \sigma_{sy} &= E_s (\epsilon_y)_{z=\frac{d}{2}}, & \tau_{sxy} &= \frac{E_s}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy})_{z=\frac{d}{2}} \\ \sigma_{sx} &= E_s (\epsilon_x)_{z=-\frac{d}{2}+d}, & \sigma_{sy} &= E_s (\epsilon_y)_{z=-\frac{d}{2}+d}, & \tau_{sxy} &= \frac{E_s}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy})_{z=-\frac{d}{2}+d} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに E_s : 鉄筋のヤング係数, ν_s : 鉄筋のポアソン比, δ : 鉄筋の張り.

基準面に関するモーメントの釣合条件より, スラブの x 軸方向に垂直な断面の単位巾当りの曲げモーメント M_x およびねじりモーメント M_{xy} がそれぞれ次式のごとく求められる.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_{xx} z dA_c + \int_{A_{sx}} \sigma_{sx} z dA_{sx} + \int_{A_{sy}} \sigma_{sy} z dA_{sy} = -D_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G_{sx} S_x \\ M_{xy} &= - \int_A \tau_{xy} z dA_c - \int_{A_{sx}} \tau_{sxy} z dA_{sx} - \int_{A_{sy}} \tau_{syx} z dA_{sy} = (1-\nu) D_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{D}_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに A_c : 単位巾当りのコンクリート断面積, A_{sx} : 単位巾当りの x 方向引張鉄筋断面積,

A_{sy} : 単位巾当りの y 方向引張鉄筋断面積.

$$\left. \begin{aligned} D_c &= \frac{E_c d^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{sx} = E_s \left\{ A_{sx} \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - d_c \right) + A_{sy} \left(\frac{d}{2} - d \right) \left(\frac{d}{2} - d_c \right) \right\} \\ G_{sx} &= E_s \left\{ A_{sx} \frac{d}{2} - A_{sy} \left(\frac{d}{2} - d \right) \right\}, \quad \bar{D}_{sx} = \frac{E_s}{1+\nu_s} \left\{ A_{sx} \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - \frac{d_c+d_s}{2} \right) + A_{sy} \left(\frac{d}{2} - d \right) \left(\frac{d}{2} - \frac{d_c+d_s}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

同様にして, スラブの y 軸に垂直な断面の単位巾当りの曲げモーメント M_y およびねじりモーメント M_{yx} がそれぞれ次式にてえられる.

$$M_y = -D_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - D_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - G_{sy} S_y, \quad M_{yx} = -(1-\nu) D_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \bar{D}_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (6)$$

ただし, D_{sy} , G_{sy} および $\bar{D}_{sy}$ は式 (5) にありて x と y に置き換え下ものである.

さて, スラブの x 方向の力の釣合条件より次式がえられる.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = 0$$

上式に式 (4), (6) を代入すれば, コンクリートの乾燥収縮に起因する R C スラブの Δw の曲面 w の微分方程式が導かれ, 途中演算を省略して結果のみ示せば次のごとくである.

$$\beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\beta_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7)$$

ただし, $\beta_1 = D_c + D_{sx}$, $\beta_2 = D_c + D_{sy}$, $\beta_3 = D_c + \frac{1}{2}(\bar{D}_{sx} + \bar{D}_{sy})$,

3. 一般解の誘導

式 (7) の解を次式で表わされるものと仮定する.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8)$$

ここに, Y_m, X_n はそれぞれ y, x のみの関数である.

式 (8) を式 (7) に代入すれば, それぞれ Y_m, X_n に関する次の微分方程式が導かれる.

$$\beta_2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} - 2\beta_3 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \beta_1 Y_m = 0, \quad \beta_1 \frac{d^2 X_n}{dx^2} - 2\beta_3 \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \beta_2 X_n = 0 \quad (9)$$

式 (9) の微分方程式は $\beta_2 - \beta_3$ の正負により異なる解を持つが, 通常使用される範囲の有効高さ, 鉄筋比およびねじり係数 ν が R C スラブにおいて通常に $\beta_2 - \beta_3 < 0$ が成立するゆえ, 次の式 (10) の解のみを考慮すれば十分である.

$$\left. \begin{aligned} Y_m &= A_m \cosh k_1 y \cosh \frac{m\pi}{a} x + B_m \cosh k_2 y \sinh \frac{m\pi}{a} x + C_m \sinh k_1 y \cosh \frac{m\pi}{a} x + D_m \sinh k_2 y \sinh \frac{m\pi}{a} x \\ X_n &= E_n \cosh \frac{n\pi}{b} x \cosh k_1 y + F_n \cosh \frac{n\pi}{b} x \sinh k_2 y + G_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \cosh k_1 y + H_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \sinh k_2 y \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに, $k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_3}{\beta_2})}$, $k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\beta_3}{\beta_2})}$, $M = \frac{\beta_1}{\beta_2}$

また A_m, B_m, C_m, D_m および E_n, F_n, G_n, H_n は境界条件より定まる積分定数である.

式 (8) を用いて式 (2) の E_x, E_y, H_y を算定し、これを式 (1), (3) に代入すれば所要エニフリートおよび鉄筋の配筋収縮率が求められる。

4. 一戸四単独支持スラブの解法

図-1 のスラブの一戸四 $x=0$ および $x=a$ が単独支持されるものとする。境界条件は次式にて表われる。
 $x=0, x=a$ において $w=0, \beta_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + G_{ex} S_m = 0$ (11)

主 (8) を式 (11) に代入すれば、未知の積分定数 E_m, F_m, G_m, H_m に関する4元連立一次方程式がえられ、これを解いて上記4定数を容易に次のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} E_m &= 0, \quad F_m = \frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{\sinh k_1 a}{\cosh k_1 a + \cosh k_2 a}, \quad +1 = -\frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \\ G_m &= \frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{\sinh k_2 a}{\cosh k_1 a + \cosh k_2 a} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

E 下-1 $\alpha_m = \frac{\pi}{a} a, \quad m=1, 3, 5, \dots$

残りの積分定数 A_m, B_m, C_m, D_m は他戸四 $y=0, y=b$ における境界条件より以下のごとく求められる。

(i) $y=0, y=b$ が単独支持の場合

境界条件は $y=0, y=b$ において $w=0, \beta_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + G_{ey} S_m = 0$ 、よって式 (12) と全く同様にして次の結果さうる。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= 0, \quad B_m = \frac{+a^2 G_{ey} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{\sinh k_1 b}{\cosh k_1 b + \cosh k_2 b}, \quad D_m = -\frac{+a^2 G_{ey} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \\ C_m &= \frac{+a^2 G_{ey} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{\sinh k_2 b}{\cosh k_1 b + \cosh k_2 b} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

E 下-1 $\alpha_m = \frac{\pi}{b} b, \quad m=1, 3, 5, \dots$

(ii) $y=0, y=b$ が固定の場合

この場合は (i) のごとく A_m, B_m, C_m, D_m を決定することはできず、先ず4個の境界条件より式がえられる。

$$(w)_{y=0} = 0 \text{ より } A_m = 0, \quad (w)_{y=b} = 0 \text{ より } B_m \cosh k_1 b \sinh k_2 b + C_m \sinh k_1 b \cosh k_2 b + D_m \sinh k_1 b \sinh k_2 b = 0 \quad (14)_a$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \text{ より } \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{d k_m}{d y} \frac{\sinh k_1 y}{a} X_m + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0 \text{ より } \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{d k_m}{d y} \frac{\sinh k_1 y}{b} X_m - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0 \quad (14)_b$$

式 (14) を含む $\sum_{m=1,3,5}^{\infty} X_m$ を正弦フーリエ級数に展開すれば次式のごとくである。

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} X_m = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{R_m}{m^3} \sinh k_1 y \quad \text{ここに } R_m = \frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{k_2 \sinh k_2 b - k_1 \sinh k_1 b}{\cosh k_1 b + \cosh k_2 b}$$

以下から式 (14) より B_m, C_m, D_m に関する次の連立一次方程式が導かれる。

$$B_m \cdot k_2 + C_m \cdot k_1 + R_m / m^3 = 0$$

$$B_m (k_1 \sinh k_1 b \sinh k_2 b + k_2 \cosh k_1 b \cosh k_2 b) + C_m (k_1 \cosh k_1 b \cosh k_2 b - k_2 \sinh k_1 b \sinh k_2 b) + D_m (k_1 \cosh k_1 b \sinh k_2 b + k_2 \sinh k_1 b \cosh k_2 b) - R_m / m^3 = 0 \quad (14)_c$$

(14)_a, (14)_c を連立に解けば、結局所要の積分定数が次のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= 0, \quad B_m = \frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{\sinh k_1 a}{\cosh k_1 a + \cosh k_2 a} \times \left(-\frac{1}{k_2} \right) \frac{k_2 \sinh k_2 b - k_1 \sinh k_1 b}{k_2 \sinh k_2 b + k_1 \sinh k_1 b}, \\ C_m &= \frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \frac{\sinh k_2 a}{\cosh k_1 a + \cosh k_2 a} \times \left(-\frac{1}{k_1} \right) \frac{k_1 \sinh k_1 b - k_2 \sinh k_2 b}{k_1 \sinh k_1 b + k_2 \sinh k_2 b}, \quad D_m = -\frac{+a^2 G_{ex} S_m}{\pi^2 \sqrt{\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2}} \frac{1}{m^3} \times \left(-\frac{1}{k_1} \right) \frac{k_2 \sinh k_2 b - k_1 \sinh k_1 b}{k_1 \sinh k_1 b + k_2 \sinh k_2 b} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(iii) $y=0, y=b$ が自由の場合

境界条件は次式で与えられる。

$$\beta_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2\beta_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \beta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \beta_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2\beta_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \beta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

この場合も $\mu_m, \beta_m, C_m, \beta_m$ と独立に定まることはできず、 β_1 と同様の関係が得られることとなる。結果は省略する。

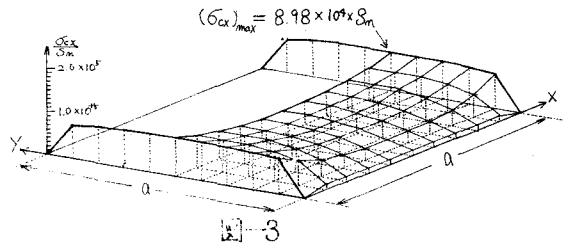
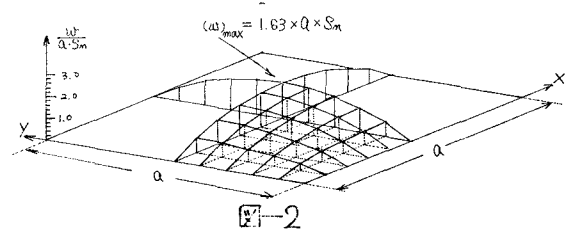
5. 計算例

有効高さ $d = \frac{a}{20}$ で固定が単純支持である正方形スラブの乾燥収縮ひびきひずみ率を算出する。配筋は単鉄筋の正方形の鉄筋網が等しいものとし、コンクリートおよび鉄筋の弾性定数は次値を用いることとする。

コンクリート: $E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.15$

鉄筋: $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_s = 0.3$

式 (12), (13) の積分定数を用い、鉄筋比 A_s/A_c による β の場合のひびき率式より求められ、図-2の結果を得る。また式 (1), (2) より同鉄筋比のスラブ下縁のコンクリート引張応力



σ_{cx} を算定し、その分布の模様と示せば図-3のごときである。図-3よりコンクリートの引張応力はスラブ中央部よりも端部で大きい値をもつことが明らかであり、例えば $S_m = 30 \times 10^{-5}$ とすれば最大引張応力は 2.7 kg/cm^2 に達する。しかし3%と云ふ鉄筋比は太くスラブとて、これはむしろ大きい値であり、これを2%, 1%, 0.5%と減らして計算すれば、それぞれ $(\sigma_{cx})_{max} = 2.2 \text{ kg/cm}^2$, 1.4 kg/cm^2 , 0.8 kg/cm^2 となる。また σ_{cx} を減ずるには断面を薄鉄筋にすることも効果があり、例えば $A_s/A_c = 3\%$, $A_s/A_c = 1\%$ のスラブでは $(\sigma_{cx})_{max} = 1.8 \text{ kg/cm}^2$ とする。

6. 結論

本研究の結果、乾燥収縮を受けるRCスラブでは、スラブ中央部よりも境界付近のコンクリートにひびきが生じ引張応力の生ずることが明らかとなり、しかしコンクリートの自由収縮ひびき S_m は一様な時間の関数であり、クリープと合わせて時間効果を考慮すれば引張応力が本論の計算値よりある程度小さくなるものと考えられ、これについてさらに研究が必要である。

〔参考文献〕 山坂静雄、宮本照：コンクリートの二次元クリープに関する理論的研究、日本建築学会論文報告集、第18号。

昭和36年6月