

九州大学 正員 山崎 浩也

〃 正員 彦坂 照

〃 学生員 羽根 悟朗

## 1. 緒言

PC 桁の応力状態は、(i)プレストレス導入時から荷重が載荷されるまでの期間と、(ii)荷重載荷以降、とでは大きく異っている。現行の設計法によれば、(i)の期間が無限に続くものとして最初に導入したプレストレスのクリープ、乾燥収縮などによる減少量を求め、この最終的に残留するプレストレス（有効プレストレス）と載荷荷重による応力との組合せにより、弾性計算を行うことになっている。これについては、著者も既に文献(1)において、コンクリートの弾性係数の時間的变化を考慮した PC 桁のクリープ挙動を明らかにした。

上記(ii)の応力状態は、プレストレスおよび載荷荷重による応力がともにクリープの影響を受けて変化する複雑なものであり、プレストレスにのみクリープを考慮する既往の解析法は必ずしも適切でない。

本研究は、以上の見地から文献(1)の結果と合わせて PC 桁のクリープ挙動をプレストレス導入後の全期間にわたって追跡し、現行設計法の安全度を確認せんとするものである。

なお本論においては、乾燥収縮の影響をひとまず無視し、コンクリートの弾性係数は時間的に変化しない定数として取り扱う。

## 2. コンクリートの応力・ひずみ関係式

いまコンクリートの材令が  $t_0$  の PC 桁にプレストレスを導入し、さらに  $t = t_2$  において持続荷重が載荷されるものとする。 $t_0 \leq t \leq t_2$  におけるコンクリートの応力とひずみを  $\bar{\sigma}_c(t)$ 、 $\bar{\epsilon}_c(t)$ 、また  $t_2 \leq t$  におけるそれらを  $\sigma_c(t)$ 、 $\epsilon_c(t)$  とすれば文献(1)により次の関係式が成立する。

$$t_0 \leq t \leq t_2 : \quad \bar{\epsilon}_c(t) = \frac{\bar{\sigma}_c(t)}{E_c} - \int_{t_0}^t \bar{\sigma}_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \quad (1)_a$$

$$t_2 \leq t : \quad \epsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c} - \int_{t_2}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_2} \bar{\sigma}_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \quad (1)_b$$

ここに  $E_c$  は コンクリートの弾性係数

$C(t, \tau)$  は クリープ関数（時刻  $\tau$  から時刻  $t$  までに生ずるクリープひずみ）

$$C(t, \tau) = \rho(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (2)$$

ただし  $\rho(\tau)$  および  $\gamma$  はそれぞれ実験により定めらる関数および定数

式(1)<sub>a</sub>と(1)<sub>b</sub>について解けば次の応力・ひずみ関係式がえられる。

$$\sigma_c(t) = \bar{\sigma}_c(t_2) + \int_{t_2}^t \dot{\bar{\sigma}}_c(\tau) \left[ C(t, \tau) + \int_{t_0}^{\tau} C(\tau, \tau_0) \frac{\partial}{\partial \tau_0} C(t, \tau_0) d\tau_0 \right] d\tau \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \gamma(\tau) &= \int_{t_2}^{\tau} \gamma [1 + E_c \rho(\tau_0)] d\tau_0 \\ \bar{\sigma}_c(t_2) &= E_c \left\{ \bar{\epsilon}_c(t_2) + \int_{t_0}^{t_2} \bar{\sigma}_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t_2, \tau) d\tau \right\}, \quad \dot{\bar{\sigma}}_c(t_2) = E_c \left\{ \dot{\bar{\epsilon}}_c(t_2) - \gamma \rho(t_2) \bar{\epsilon}_c(t_2) + \int_{t_0}^{t_2} \gamma \rho(\tau_0) \frac{\partial}{\partial \tau_0} C(t_2, \tau_0) d\tau_0 \right\} \end{aligned}$$

### 3. 変形の微分方程式の誘導

図-1のごとくPC桁の左端に原点をとり、断面の図心軸に沿ってx軸、垂直下方にz軸をそれぞれ設ける。PC鋼材の断面積を $A_s$ とし、軸方向圧縮力はx軸の下方zの位置に作用するものと仮定する。 $t_1 \leq t \leq t_2$ の任意時刻における鋼材の引張力 $\bar{p}(t)$

は文献(1)の式(20)を変形して次式で与えられる。

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(t_1) \left\{ 1 - J r \varphi(t) E_c e^{\mu t} t_1^m \int_{t_1}^t \frac{e^{-\mu \tau}}{\tau^m} d\tau \right\} \quad (4)$$

$$\text{ここに } J = \frac{r n \left\{ 1 + \left( \frac{t_1}{f} \right)^p \right\}}{r n \left\{ 1 + \left( \frac{t}{f} \right)^p \right\} + \left( \frac{t}{f} \right)^p}$$

$$\mu = r \left\{ 1 + J E_c \alpha \right\}, m = J r E_c A_s, r = \frac{A_s}{A_c}, n = \frac{E_s}{E_c}, t_1^m = \frac{I_c}{A_c}$$

ただし  $A_c$ : コンクリートの断面積  $E_s$ : 鋼材の弾性係数  $I_c$ : 断面二次モーメント  
次に  $t_1 \leq t \leq t_2$  における鋼材のひずみを $\varepsilon_s(t)$ とし、かつ鋼材とコンクリートが一体となって変形するものとするは、式(1)のひずみとの間に次の関係が成立する。

$$\Delta + \varepsilon_s(t) = \varepsilon_c(t) \quad (5)$$

桁のx方向のたわみを $w(t)$ 、軸方向ひずみおよび回転ひずみをそれぞれ $\varepsilon_c(t)$ 、 $-z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}$ とすれば、任意点のひずみ $\varepsilon_c(t)$ は次式で表わされる。

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c0}(t) - z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

したがって  $t_1 \leq t \leq t_2$  における鋼材の引張力 $P(t)$ は式(5)と式(6)を用いて次式のごとく書き表わされる。

$$P(t) = E_s A_s \varepsilon_s(t) = E_s A_s \left\{ \Delta + \varepsilon_{c0}(t) - z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right\} \quad (7)$$

さて、断面の図心軸に関するモーメントおよび軸方向力の釣合条件より次式が成立する。

$$M(x) - P(t) f = \int_{A_c} \sigma_c(t) z dA_c \quad (8_a)$$

$$-P(t) = \int_{A_c} \sigma_c(t) dA_c \quad (8_b)$$

ただし  $M(x)$  は荷重による曲げモーメント

式(8<sub>a</sub>)および式(8<sub>b</sub>)の左辺に式(7)、右辺に式(3)を代入して整理すれば、次の $w(t)$ 、 $\varepsilon_{c0}(t)$ に関する連立方程式が与えられる。

$$\begin{aligned} M(x) - E_s A_s \left\{ \Delta + \varepsilon_{c0}(t) - z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right\} &= E_s A_s \left\{ \varepsilon_{c0}(t) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{f P(\tau)}{I_c} \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau, x) d\tau \right\} - E_s A_s \left\{ e^{-\gamma(t)} \int_{t_2}^t \frac{\partial^2 w(\tau)}{\partial x^2} - r P(\tau) E_c \right\} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \left\{ \frac{f P(t)}{I_c} \frac{\partial}{\partial t} [r \varphi(t) e^{\gamma(t-t_1)}] d\tau \right\} - E_s A_s \left\{ e^{-\gamma(t)} \int_{t_2}^t \frac{\partial^2 w(\tau)}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 w(\tau)}{\partial x^2} \right\} d\tau d\tau \end{aligned} \quad (9_a)$$

$$\begin{aligned} -E_s A_s \left\{ \Delta + \varepsilon_{c0}(t) - z \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right\} &= E_s A_s \left\{ \varepsilon_{c0}(t) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{P(\tau)}{A_c} \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau, x) d\tau \right\} + E_s A_s \left\{ e^{-\gamma(t)} \int_{t_2}^t \left[ \varepsilon_{c0}(\tau) - r \varphi(\tau) E_c \right] \varepsilon_{c0}(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} \frac{P(\tau)}{A_c} \frac{\partial}{\partial \tau} [r \varphi(\tau) e^{\gamma(\tau-t_1)}] d\tau \right\} + E_s A_s \left\{ e^{-\gamma(t)} \int_{t_2}^t \left\{ \varepsilon_{c0}(\tau) + r \dot{\varepsilon}_{c0}(\tau) \right\} d\tau d\tau \right\} \end{aligned} \quad (9_b)$$

式(9)の連立方程式を直接解くことは不可能であるが、式(9)の両辺を $t$ で2回微分して整理すれば、結局次の式(10)の連立微分方程式が導かれ、与えられる初期条件のもとで解くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\rho n} \left( \frac{r}{f} \right)^2 + f \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} + \left\{ \frac{r}{\rho n} \left( \frac{r}{f} \right) + \dot{\gamma}(t) f \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} \right\} = \ddot{\epsilon}_{co}(t) + \dot{\gamma}(t) \dot{\epsilon}_{co}(t) \right. \\ \left. f \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} + \dot{\gamma}(t) f \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} = \left\{ \frac{1}{\rho n} + 1 \right\} \ddot{\epsilon}_{co}(t) + \left\{ \frac{r}{\rho n} + \dot{\gamma}(t) \right\} \dot{\epsilon}_{co}(t) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

#### 4. 微分方程式の解法

式(9)および式(10)から $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ および $\ddot{\epsilon}_{co}(t)$ を消去し、かつ

$$\frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} = g(t) \quad (11)$$

の置換を行えば、次の $g(t)$ に関する微分方程式がえられる。

$$\dot{g}(t) + A(t)g(t) = 0 \quad (12)$$

$$\therefore \text{に} \quad A(t) = \frac{\rho n \left\{ 1 + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \right\} \left\{ r + r \dot{\gamma}(t) \frac{r}{f} + r \left( \frac{r}{f} \right)^2 \right\}}{\rho n \left\{ 1 + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \right\} + \left( \frac{r}{f} \right)^2}$$

式(12)を解いて

$$g(t) = g(t_2) e^{-\int_{t_2}^t A(\tau) d\tau} \quad (13)$$

$$\therefore \text{に} \quad f g(t) = \frac{\left( \frac{r}{f} \right)^2 \left[ r \dot{\gamma}(t_2) E_1 \left\{ f \frac{\partial^2 \dot{w}(t_2)}{\partial x^2} - r \dot{\gamma}(t_2) E_1 \left( f \frac{\partial^2 \dot{w}(t_2)}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \dot{\gamma}(t_2) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t_2, \tau) \right\} + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \dot{\gamma}(t_2) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t_2, \tau) \right]}{\rho n \left\{ 1 + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \right\} + \left( \frac{r}{f} \right)^2}$$

$g(t)$ が求まれば式(11)を解いて、 $\frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2}$ は次式で与えられることとなる。

$$\frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{w}(t_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}(t_2)}{\partial x^2} \int_{t_2}^t e^{-\int_{t_2}^{\tau} A(\tau) d\tau} d\tau + g(t_2) e^{-\int_{t_2}^t A(\tau) d\tau} \int_{t_2}^t e^{\int_{t_2}^{\tau} A(\tau) d\tau} d\tau \quad (14)$$

式(14)を式(10)に代入すれば $\dot{\epsilon}_{co}(t)$ が容易にえられ、結果の明示は次式のごとくである。

$$\dot{\epsilon}_{co}(t) = \dot{\epsilon}_{co}(t_2) + \dot{\epsilon}_{co}(t_2) \int_{t_2}^t e^{-\int_{t_2}^{\tau} A(\tau) d\tau} d\tau + \dot{\epsilon}_{co}(t_2) \int_{t_2}^t e^{-\int_{t_2}^{\tau} A(\tau) d\tau} \int_{t_2}^{\tau} e^{\int_{t_2}^{\eta} A(\eta) d\eta} d\eta d\tau \quad (15)$$

$$\therefore \text{に} \quad \dot{\epsilon}_{co}(t) = \frac{\left( \frac{r}{f} \right)^2 \left[ r \dot{\gamma}(t_2) E_1 \left\{ \dot{\epsilon}_{co}(t_2) - r \dot{\gamma}(t_2) E_1 \left( \dot{\epsilon}_{co}(t_2) - \int_{t_2}^{\tau} \dot{\gamma}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t_2, \tau) d\tau \right) + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \dot{\gamma}(t_2) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t_2, \tau) \right\} \right]}{\rho n \left\{ 1 + \left( \frac{r}{f} \right)^2 \right\} + \left( \frac{r}{f} \right)^2}$$

式(14)と与えられた境界条件の下で解けば、PC鋼材の軸方向圧縮力と載荷荷重に起因するPC桁の任意点のたわみが時間 $t$ ( $\geq t_2$ )の関数として与えられ、同様に式(15)は任意時刻におけるPC桁の軸方向ひずみを与えるものである。さらにこれら両式を式(3)および式(7)に代入して整理すれば、任意時刻におけるPC鋼材の引張力およびコンクリートのたわみが次式で与えられる。

$$P(t) = P(t_2) \left\{ 1 - \int_{t_2}^t r \dot{\gamma}(\tau) E_1 e^{\mu \tau} \int_{t_2}^{\tau} e^{-\int_{t_2}^{\eta} A(\eta) d\eta} d\eta d\tau \right\} + \left\{ \frac{r \dot{\gamma}(t_2) E_1 M(t_2)}{1 + \left( \frac{r}{f} \right)^2} - \int_{t_2}^t \dot{\gamma}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ r \dot{\gamma}(\tau) E_1 e^{\mu \tau} \int_{t_2}^{\tau} e^{-\int_{t_2}^{\eta} A(\eta) d\eta} d\eta d\tau \right] d\tau \right\} e^{\mu t} \int_{t_2}^t e^{-\int_{t_2}^{\eta} A(\eta) d\eta} d\eta \quad (16)$$

$$\delta_c(t) = -\frac{P(t)}{I_c} \cdot (r_0^2 + f^2) + M(t) \frac{r}{I_c} \quad (17)$$

## 5. 計算例

図-2のごとき矩形断面をもつスパン7mの単絶支持PC桁を考える。PC鋼梁は鋼線群の重心位置に築き上げられているものとして取り扱い、そのセグ係数を $E_s=2.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ とする。またコンクリート断面の諸係数はPC鋼線断面積を無視して計算し、その弾性係数を $E_c=2.5 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ とする。式(2)のクリープ関数を決定する任意定数は文献(1)により求めた $\gamma=0.0304$ ,  $A_1=2.94 \times 10^4$ ,  $C_1=0.508 \times 10^4$ を採用した。

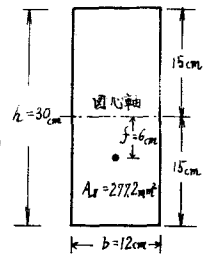


図-2

コンクリートの材令が $t_c=7$ 日の時、プレテンション方式により鋼線に $P(t)=33.3 \text{ ton}$ の引張力を与え、次いで $t=28$ 以降は $P=36.4 \text{ kg/m}$ の自重が作用するものとしてPC桁のクリープ挙動を推跡すれば以下のごとくである。(図-3および図-4参照)

(i)  $t_1 \leq t < t_2$

この期間におけるPC桁はプレストレスのみの作用を受ける。鋼材引張力 $P(t)$ は部材の弾性変形およびコンクリートのクリープにより図-3のA→B→Cのごとく減少し、これに対応してコンクリートの応力 $\sigma_c(t)$ も図-4のA→B→Cの減少曲線を描くこととなる。このまま荷重が載荷されなければ、 $P(t)$ ,  $\sigma_c(t)$ ともにC→Dのごとく減少を続け、例えは $P(t)$ は最終的には $22.3 \text{ ton}$ となり、この場合の有効率は、66.7%である。

(ii)  $t \geq t_2$

$t = t_2$ にPC桁は自重を受け始め、 $P(t)$ ,  $\sigma_c(t)$ はともに桁の位置によって異なる値をもつことになるが、ここではスパン中央点における両者の変化のみを取り扱う。 $P(t)$ は図-3のC→Dのごとく増加した後、再び減少しEに至る。他方、図-4でコンクリートの下縁圧縮応力はC→D→Eの減少を見せ、また上縁応力は引張から圧縮に変化した後、極めて僅かではあるが増加曲線DEを描く。コンクリートの下縁残留圧縮応力は約 $100 \text{ kg/cm}^2$ となり、これをプレストレスのみクリープを考慮する現行計算法の $87 \text{ kg/cm}^2$ と比較すれば、前者が14.5%大きい。

## 6. 結語

本研究はPC桁のプレストレスと荷重による応力の双方にクリープを考慮し、その厳密なクリープ挙動の推跡を可能ならしめたものである。本論を文献(1)と併せ用いることにより、プレストレス導入後の全期間にあたるPC桁の変形と応力状態を的確に把握することができ、PC桁の経済的かつ力学的に適正な設計に資することとなる。

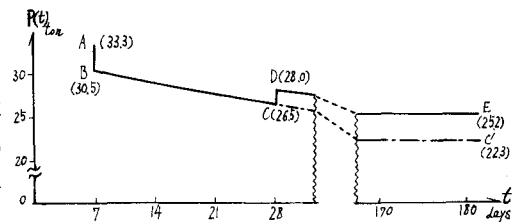


図-3 : スパン中央におけるPC鋼材引張力の時間的変化

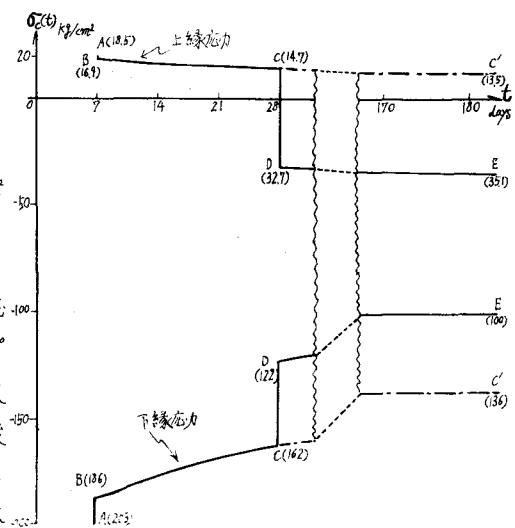


図-4 : スパン中央におけるコンクリートの応力の時間的変化

[参考文献] (1) 山崎彦坂・刊根：PC桁のクリープに関する研究、第23回土木学会年次学術講演会報告集、昭和42年10月