

九州大学 正員 山崎 徳也

長崎大学 正員 崎山 毅

九州大学 学生員 オチヤ 岩敏彌

1 序言 諸種の外力に対する梁の過渡応答を知るためには、その梁の固有周期、振動モードによって表わされる自由振動性が明らかでなければならない。連続梁の自由振動解法には、振動撓角法、動的3モーメント法などがあるが、これらの解法によれば振動モードが連続梁の個々のスパンについて別個の式で与えられるために、過渡応答算定のための Modal Analysis の適用が困難になる。この困難を除くためには振動モードを連続梁の全体にわたって一個の式で表現する必要があり、たとえばフーリエ級数を用いた手法などもその一つとして試みられている。

本論文は Dirac の delta 函数、unit step 函数を用いることにより、微分方程式およびその解函数などの簡潔なる表現をえ、それが自由振動解析に便なることを示すと共に、連続円形曲り梁の走行荷重に対する動的応答を求めたものである。

2. 円形曲り梁の基本式 円形曲り梁が受ける外力、すなわち鉛直荷重強度およびねじれ荷重強度をそれぞれ q, m で表わし、これら外力によって生ずる円形曲り梁の変形量、すなわち鉛直たわみ、たわみ角およびねじれ角をそれぞれ w, ψ, ϕ とすれば、これら変形量と荷重強度との間には次式が成立する。²⁾

$$\frac{d^4 w}{ds^4} - \mu \frac{d^2 w}{ds^2} + (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\psi}}{ds^2} - \frac{R^2 q}{EI} = 0 \quad (1) \quad (1+\mu) \frac{d^2 w}{ds^2} - \mu \frac{d^2 \bar{\psi}}{ds^2} + \bar{\psi} - \frac{R^2}{EI} m = 0 \quad (2)$$

ここに R : 円形曲り梁の曲率半径, $\bar{\psi} = R\psi$, $\mu = GJ/EI$

EI, GJ : 円形曲り梁の曲げ剛性およびねじれ剛性

3. 連続円形曲り梁の面外自由振動

図-1(a)に示すように、中心 O 、半径 R 、中心角 α の連続曲り梁 AB が中間支点 $1, 2, \dots$ としてそれぞれ単純支持されているものとする。梁が振動すれば図-1(b)に示すように中間支点において反力 Q_i が生じるが、これは AB 部材に作用する強制力と見做すことができ、連続曲り梁の自由振動の基本式は式(1), (2)より曲り梁の強制振動の微分方程式と同じく次式で与えられることとなる。

なお、以下の解析においてはねじれモーメント荷重強度 m を無視する。

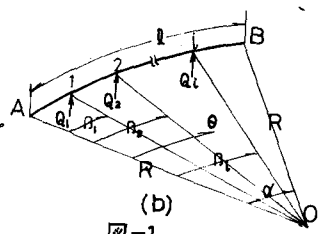
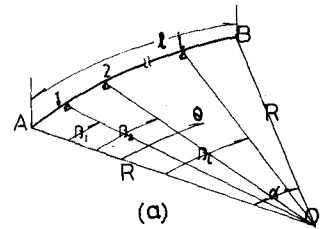
$$\frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial \tau^4} - \alpha^2 \mu \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} + \alpha^2 (1+\mu) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} + \frac{EI}{EI} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} - \frac{EI}{EI} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3)$$

$$(1+\mu) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} - \mu \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \tau^2} + \alpha^2 \bar{\psi} = 0 \quad (4)$$

ここに $\theta = \tau \alpha$, $\beta_i = \tau_i \alpha$, $\tau = \tau t$, $\tau_i = \tau_i t$, $\tau_0 = l/v_0$, $v_0 = R\theta/t$, $\delta(\tau - \tau_i)$: Dirac の delta 函数,

ρ : 梁の単位長さあたりの質量,

ここで $w(\tau, \tau) = W(\tau) \sin \omega \tau$, $\bar{\psi}(\tau, \tau) = \bar{\Psi}(\tau) \sin \omega \tau$ とおいて式(3), (4)に代入し、変数を分離すれば規準函数 $W(\tau), \bar{\Psi}(\tau)$ に関する次式がえられる。



$$\frac{d^4 W}{dp^4} - \alpha^2 \mu \frac{d^2 W}{dp^2} + \alpha^2 (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dp^2} - \lambda^4 \alpha^4 W - \sum_{i=1}^n \frac{V_i l^3}{EI} \delta(p-\xi_i) = 0 \quad (5), \quad (1+\mu) \frac{d^2 W}{dp^2} - \mu \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dp^2} + \alpha^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (6),$$

ただし, $\lambda^4 = \frac{c \omega^2 R^4}{EI}$, 式(5),(6)より $\bar{\varphi}$ を消去し W を求め, さらに A, B 端での境界条件を用うることにより振動数方程式および振動モードが決定される。

4. 連続円形曲り梁の走行荷重による強制振動

図-2に示すように単一集中荷重 P が定速度で走行するときの連続円形曲り梁の強制振動の基本式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p^2} - \alpha^2 \mu \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + \alpha^2 (1+\mu) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial p^2} + k \alpha^4 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c k \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \delta(p-l) - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i l^3}{EI} \delta(p-\xi_i) - \frac{P l^3}{EI} \delta(p-l) \quad (7)$$

$$(1+\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} - \mu \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial p^2} + \alpha^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (8)$$

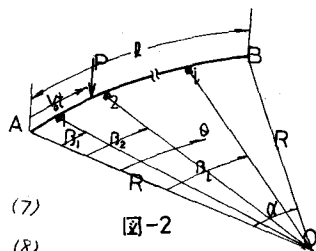


図-2

ここに $c = P_0/p_0 = (\text{荷重の質量})/(\text{梁の全質量})$, $k = (\frac{e R^4}{EI c}) = (\text{無次元速度})$

鉛直たわみ w , 反力 Q_i およびねじれ角 φ を次のごとく変数分離し, 式(7),(8)に代入すれば次式をうる。

$$w(p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \bar{\varphi}_n(p) \quad (9)$$

$$Q_i(t) = \sum_{i=1}^n V_i T_n(t), \quad \bar{\varphi}(p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) \bar{\varphi}_n(p), \quad Y(t) - w(t, l) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \bar{\varphi}_n(l)$$

ただし, $\bar{\varphi}_n(p)$ は後の解析が簡単になるように $\int_0^l \bar{\varphi}_n(p) \bar{\varphi}_m(p) dp = I$ ($m=n$), $\int_0^l \bar{\varphi}_n(p) \bar{\varphi}_m(p) dp = 0$ ($m \neq n$) なる関係を満たす正規化モードとする。

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} T_n - \alpha^2 \mu \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} T_n + \alpha^2 (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} H_n + k \alpha^4 \frac{d^2 T_n}{dt^2} \bar{\varphi}_n + c k \frac{d^2 Y}{dt^2} \delta(p-l) - \sum_{i=1}^n \frac{V_i l^3}{EI} T_n \delta(p-\xi_i) = \frac{P l^3}{EI} \delta(p-l) \quad (10)$$

$$(1+\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} T_n + (-\mu \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} + \alpha^2 \bar{\varphi}_n) H_n = 0 \quad (11)$$

式(6),(11)より $(1+\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} (T_n - H_n) = 0$, よって $T_n = H_n$ がえられ式(10)は次のごとく整理される。

$$[\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} - \alpha^2 \mu \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} + \alpha^2 (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} - \sum_{i=1}^n \frac{V_i l^3}{EI} \delta(p-\xi_i)] T_n + k \alpha^4 \bar{\varphi}_n \frac{d^2 T_n}{dt^2} + c k \frac{d^2 Y}{dt^2} \delta(p-l) = \frac{P l^3}{EI} \delta(p-l) \quad (12)$$

一す, 式(12)より $\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} - \alpha^2 \mu \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} + \alpha^2 (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dp^2} - \sum_{i=1}^n \frac{V_i l^3}{EI} \delta(p-\xi_i) = \lambda^4 \alpha^4 \bar{\varphi}_n$ なるゆえ, 式(12)に代入すれば時間関数 T_n に関する次式をうる。

$$k \alpha^4 \bar{\varphi}_n \frac{d^2 T_n}{dt^2} + c k \alpha^4 \frac{d^2}{dt^2} (T_n \bar{\varphi}_n(l)) \cdot \delta(p-l) + \lambda^4 \alpha^4 \bar{\varphi}_n T_n = \frac{P l^3}{EI} \delta(p-l) \quad (13)$$

さらに, 式(13)の両辺に $\bar{\varphi}_n$ を掛け p の変域 $[0, l]$ で積分すれば結局次式となる。

$$k \alpha^4 \frac{d^2 T_n}{dt^2} + c k \alpha^4 \bar{\varphi}_n(l) \frac{d^2}{dt^2} (T_n \bar{\varphi}_n(l)) + \lambda^4 \alpha^4 T_n = \frac{P l^3}{EI} \bar{\varphi}_n(l) \quad (14)$$

$$\text{式(14)において } k \neq 0 \text{ のとき } \frac{d^2 T_n}{dt^2} + c \bar{\varphi}_n(l) \frac{d^2}{dt^2} (T_n \bar{\varphi}_n(l)) + \frac{\lambda^4}{k} T_n = \frac{P l^3}{EI} \frac{\bar{\varphi}_n(l)}{k \alpha^4} \quad (15)$$

式(15)より T_n を算出のうえ式(9)に代入すれば梁の重たわみが求められる, また $k=0$ のときは $T_n = \frac{P l^3}{EI} \frac{\bar{\varphi}_n(l)}{\lambda^4 \alpha^4}$ となり, 式(9)より梁の静的たわみが求められることとなる。

5 解例 図-3に示すごとき2スパン連続曲り梁についての計算例を示すこととする。

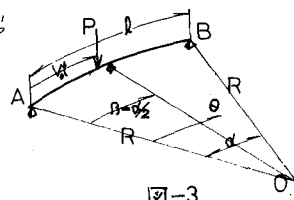


図-3

1) 曲り梁の自由振動 式(5),(6)にラプラス変換を適用し, $L[W(p)] = F(s)$ および $L[\bar{\varphi}(p)] = G(s)$

とすれば次式をうる。

$$[S^2 F(\omega) - S^2 W(\omega) - W''(\omega) - W''(\omega)] - \mu [S^2 F(\omega) - S W(\omega) - W''(\omega)] + (1+\mu) [S^2 G(\omega) - S \tilde{W}(\omega) - \tilde{W}''(\omega)] - \lambda^2 F(\omega) = Q \cdot e^{-\beta x} \quad (16)$$

$$(1+\mu) [S^2 F(\omega) - S W(\omega) - W''(\omega)] - \mu [S^2 G(\omega) - S \tilde{W}(\omega) - \tilde{W}''(\omega)] + G(\omega) = 0 \quad (17)$$

$$\therefore \lambda^2 = \frac{\rho \omega^2 R^4}{EI}, \quad Q = \frac{V R^4}{EI}, \quad \beta = \frac{1}{2} \theta$$

式(16), (17) に A 端での境界条件 $W(0) = W'(0) = \tilde{W}(0) = 0$ を代入し, 両式より $G(\omega)$ を消去して整理すれば次式をうる。

$$F(\omega) = W(0) (S^2 + 1)^2 / \chi + W''(0) (S^2 - 1) / \mu / \chi - \tilde{W}''(0) (1 + 1/\mu) / \chi + Q (S^2 - 1/\mu) \cdot e^{-\beta x} / \chi \quad (18)$$

ここに $\chi = S^4 + 2S^2 + (1 - \lambda^2)S^2 + \lambda^2/\mu$, 式(18) を逆ラプラス変換して整理すると次式となる。

$$W(\omega) = C_1 \cdot \text{sh} X \theta + C_2 \cdot \text{sh} Y \theta + C_3 \cdot \text{si} Z \theta + Q \{ a \cdot \text{sh} X(\theta - \beta) - b \cdot \text{sh} Y(\theta - \beta) - c \cdot \text{si} Z(\theta - \beta) \} \cdot u(\theta - \beta) \quad (19)$$

ただし, 定数 X, Y, Z は次の各式から求まる。

$$X^4 + 2X^2 + (1 - \lambda^2)X^2 + \lambda^2/\mu = 0 \quad (X > 0), \quad Y^4 + 2Y^2 + (1 - \lambda^2)Y^2 + \lambda^2/\mu = 0 \quad (Y > 0), \quad Z^4 - 2Z^2 + (1 - \lambda^2)Z^2 - \lambda^2/\mu = 0 \quad (Z > 0)$$

C_1, C_2, C_3 は境界条件によって決定される定数, a, b, c は X, Y, Z によって定まる係数,

$$\text{sh} X \theta = \sinh X \theta, \dots, \text{si} Z \theta = \sin Z \theta, \quad u(\theta - \beta) : \text{unit step 函数}$$

式(19)を用いて中間支点 1 および B 端での境界条件 $W(a) = W'(a) = W''(a) = W(\beta) = 0$ を考慮すると次の連立方程式がえられる。

$$\begin{pmatrix} W(a) \\ W'(a) \\ W''(a) \\ W(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sh} X a & \text{sh} Y a & \text{si} Z a & a \text{sh} X(a - \beta) - b \text{sh} Y(a - \beta) - c \text{si} Z(a - \beta) \\ X^2 \text{sh} X a & Y^2 \text{sh} Y a & -Z^2 \text{si} Z a & a X^2 \text{sh} X(a - \beta) - b Y^2 \text{sh} Y(a - \beta) + c Z^2 \text{si} Z(a - \beta) \\ X^4 \text{sh} X a & Y^4 \text{sh} Y a & Z^4 \text{si} Z a & a X^4 \text{sh} X(a - \beta) - b Y^4 \text{sh} Y(a - \beta) - c Z^4 \text{si} Z(a - \beta) \\ \text{sh} X \beta & \text{sh} Y \beta & \text{si} Z \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

式(20)において, C_1, C_2, C_3, Q が根をもつためには次式が成立しなければならない。

$$\begin{vmatrix} \text{sh} X a & \text{sh} Y a & \text{si} Z a & a \text{sh} X(a - \beta) - b \text{sh} Y(a - \beta) - c \text{si} Z(a - \beta) \\ X^2 \text{sh} X a & Y^2 \text{sh} Y a & -Z^2 \text{si} Z a & a X^2 \text{sh} X(a - \beta) - b Y^2 \text{sh} Y(a - \beta) + c Z^2 \text{si} Z(a - \beta) \\ X^4 \text{sh} X a & Y^4 \text{sh} Y a & Z^4 \text{si} Z a & a X^4 \text{sh} X(a - \beta) - b Y^4 \text{sh} Y(a - \beta) - c Z^4 \text{si} Z(a - \beta) \\ \text{sh} X \beta & \text{sh} Y \beta & \text{si} Z \beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

式(21)は図-3 に示すとき 2 スパン連続曲り梁の振動数方程式にほかならない。ここでは曲り梁の対称性に着目して, 対称振動時と逆対称振動時に分けて考えることとし, 式(20)および式(21)を用いておのこの場合の振動数方程式と正規化振動モードを求めた。次にその結果のみを記す。

逆対称振動時: $\sin \frac{Z \theta}{2} = 0, \quad \tilde{W}_n(\theta) = \sqrt{2} \sin \frac{Z \theta}{2} \quad (22)$

対称振動時: $-a \frac{\text{sh} X \beta}{\text{sh} X a} \cdot \text{sh} X(a - \beta) + b \frac{\text{sh} Y \beta}{\text{sh} Y a} \cdot \text{sh} Y(a - \beta) + c \frac{\text{si} Z \beta}{\text{si} Z a} \cdot \text{si} Z(a - \beta) = 0$

$$\tilde{W}_n(\theta) = K \left[-a \frac{\text{sh} X(a - \beta)}{\text{sh} X a} \cdot \text{sh} X \theta + b \frac{\text{sh} Y(a - \beta)}{\text{sh} Y a} \cdot \text{sh} Y \theta + c \frac{\text{si} Z(a - \beta)}{\text{si} Z a} \cdot \text{si} Z \theta + \{ a \text{sh} X(\theta - \beta) - b \text{sh} Y(\theta - \beta) - c \text{si} Z(\theta - \beta) \} u(\theta - \beta) \right] \quad (23)$$

ここに K は正規化条件を満足することく決定された定数

ii) 走行荷重による強制振動 図-3 に示すような 2 スパン連続曲り梁の正規化モードに対する式(22), (23) を式(15) に代入すれば次の式(24), (25) をうる。

$$\text{逆対称振動時: } \frac{d^2 T_n}{d\tau^2} + \frac{4\sqrt{2} c_n \pi E \tilde{F}_n \cos 2n\pi E}{1 + c_n E^2} \frac{dT_n}{d\tau} + \frac{\sqrt{2} c_n \tilde{F}_n^2 (2n\pi)^2 + \lambda^2/k^2}{1 + c_n E^2} T_n = \frac{P \delta^3}{EI} \frac{\tilde{F}_n}{k^2 \alpha^4 (1 + c_n E^2)} \quad (24)$$

$$\text{対称振動時: } \frac{d^2 T_n}{d\tau^2} + \frac{c_n E \tilde{F}_n}{1 + c_n E^2} \frac{dT_n}{d\tau} + \frac{c_n E \tilde{F}_n + \lambda^2/k^2}{1 + c_n E^2} T_n = \frac{P \delta^3}{EI} \frac{\tilde{F}_n}{k^2 \alpha^4 (1 + c_n E^2)} \quad (25)$$

$$f_1 = K[-A(\alpha a)^2 \sinh \alpha a I + B(Y a)^2 \sinh Y a I - C(Z a)^2 \sinh Z a I + \{a(\alpha a)^2 \sinh \alpha a (I - \xi_1) - b(Y a)^2 \sinh Y a (I - \xi_1) + c(Z a)^2 \sinh Z a (I - \xi_1)\} U(I - \xi_1)]$$

$$f_2 = 2K[-A(\alpha a) \cdot \cosh \alpha a I + B(Y a) \cosh Y a I + C(Z a) \cosh Z a I + \{a(\alpha a) \cosh \alpha a (I - \xi_1) - b(Y a) \cosh Y a (I - \xi_1) - c(Z a) \cosh Z a (I - \xi_1)\} U(I - \xi_1)]$$

$$f_3 = K[-A \sinh \alpha a I + B \sinh Y a I + C \sinh Z a I + \{a \sinh \alpha a (I - \xi_1) - b \sinh Y a (I - \xi_1) - c \sinh Z a (I - \xi_1)\} U(I - \xi_1)]$$

ここに $A = a \sinh \alpha a (I - \xi_1) / \sinh \alpha a$, $B = b \sinh Y a (I - \xi_1) / \sinh Y a$, $C = c \sinh Z a (I - \xi_1) / \sinh Z a$

式(24), (25)より時間函数 T_n を求め、式(4)に代入すればそれぞれの振動時における動的たわみが求められる。

iii) 数値計算および考察 上述の5, ii)において与えられた2スパン連続円形曲り梁の固有値および正規化モードの諸係数は次表のごとくである。なお、曲り梁の中心角 α は 120° , β は 60° とし、梁の断面剛性比 μ は $1/1.3$ (円形断面梁) とする。

外力が作用するとき梁に生じる振動モードは自由振動の振動モードと同じ型をとり、一般に連続梁においては動的たわみに及ぼす高次振動の影響は無視できず、本例のごとく単一集中荷重が梁上を走行するときの $1/4$ 点の運動は1次および2次の固有振動に支配される。ここでは各振動時の動的たわみを比較検討し、6次振動までの和を求め、 $1/4$ 点の動的たわみ影響線を図-4(a), (b)に図示した。図中の破線は荷重質量の影響を厳密に考慮した場合の $1/4$ 点の動的たわみ影響線であり、無次元速度 v は $\sqrt{\frac{EI}{\rho A L}}$ とする。

次数 n	固有値 λ_n	K	a	b	c	A	B	C
1	2.7346	$\sqrt{2}$	-0.1276	-0.0042	-0.0984			
2	3.5992	23.407	-0.0899	-0.0003	-0.0787	-0.0027	-0.0001	-0.0596
3	5.8638	$\sqrt{2}$	-0.0529	-0.0000	-0.0504			
4	6.6469	43.751	-0.0464	-0.0000	-0.0447	-0.0000	-0.0000	-0.0323
5	8.9087	$\sqrt{2}$	-0.0344	-0.0000	-0.0337			
6	9.6742	63.803	-0.0316	-0.0000	-0.0311	-0.0000	-0.0000	-0.0222

6 結論

本報においては、単一集中荷重による2スパン連続曲り梁の動的応答性状についてのみ数値計算を行なった。中間支点で単純支持されるその他の連続曲り梁についてもその固有値および正規化モードを知ることができれば、式(15)および式(19)より動的たわみが算出できることは言うまでもない。さらにまた走行周期力が作用する場合および荷重の速度が変化する場合についても本法の適用によって解析可能となる。

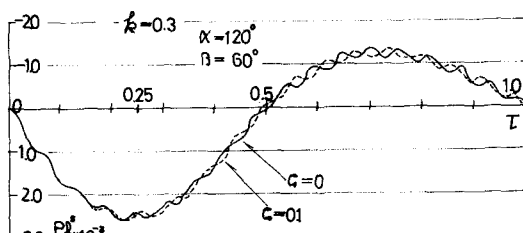


図-4(a)

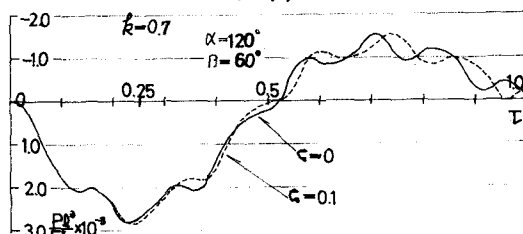


図-4(b)

参考文献

- 1) 山崎徳也、山崎毅、坪井岩敏、岩崎孝「質量を考慮した走行荷重に対する円形曲り梁の動的応答」九工大集報、第4巻、第0号、(昭和44年12月)
- 2) 山崎徳也、山崎毅「円形曲り梁の面外自由振動」九工大集報、第4巻、第2号、(昭和44年3月)