

九州大学 正 員 山崎徳也

" " 太田俊昭

" " 学生員 坂本敏二

1. 序 言

有限要素法は板解法として簡明かつ一般性を有する実用解法であり、電子計算機の発展に伴いその有用性は広く一般に認識されるようになってきた。周知のごとく、この種解法は板要素の分布応力をその頂点に生ずる集中力に置換して解く近似解法であるため、解の精度が極めて重要な問題となる。しかるにこの分野に関する既往研究^{1),2)}は、いずれも変位関数の次数を上げ、項数を増す方法が用いられているため、問題の変位関数が板の曲げ平衡方程式を満足せず、したがって応用範囲が二次元問題に限られ、一般性に欠ける感がある。

本研究は、上述の難点を排除するため、まず板の要素周辺の連続性を考慮すべく、選定法によって辺の途中に不静定力を作用させ、これを考慮した板全体のひずみエネルギーを算定し、次いで変形に関する適否条件よりこれらの未知不静定力を決定して解の精度の向上を図らんとしたものである。

2. 基本公式の誘導

図-1に示す辺長 $l \times l'$ の矩形板要素の *Stiffness Matrix* は、板要素の変位関数を式(1)のごとく一般的に板定すれば、以下のごとく誘導される。

すなわち、板要素の任意点 (x, y) の変形成分 $\{u\}$ を任意の変位関数 $\{M\}$ を用いて次式で定義する。

$$\{u\} = \{M\} \{\alpha\} \quad \text{----- (1)}$$

図-1

式(1)より板要素の頂点 A ($A=1, 2, 3, 4$ をすべて含むものとする) の変形成分 $\{u_A\}$ が、各頂点の座標値に関する係数行列 $\{C\}$ を媒介として求められ次式となる。

$$\{u_A\} = \{C\} \{\alpha\} \quad \text{----- (2)}$$

式(1), (2)より直ちに未知常数 $\{\alpha\}$ が次のごとく求められる。

$$\{\alpha\} = [C^{-1}] \{u_A\} \quad \text{----- (3)}$$

一方、ひずみ成分 $\{\epsilon\}$ および応力成分 $\{\sigma\}$ は、後述の式(19)および式(20)を用いれば式(1)よりそれぞれ式(4)および式(5)のごとくえられる。

$$\{\epsilon\} = [B] \{\alpha\} \quad \text{----- (4)}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D][B] \{\alpha\} \quad \text{----- (5)}$$

ここに $[B]$ は座標値 (x, y) に関する行列であり、 $[D]$ は応力とひずみの関係を規定する正方行列である。

式(4), (5)より、板内部に与えられるひずみエネルギーを U とすれば、

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad \text{----- (6)}$$

式(4), (5)を代入して

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\alpha\}^T [B]^T [D] [B] \{\alpha\} dV = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [H] \{\alpha\} \quad \text{----- (7)}$$

ただし、 $[H] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$, dV : 微小体積。

さらに、式(7)に式(3)を代入すれば、次のごとく変形される。

$$U = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [C]^{-1} [H] [C]^{-1} \{u_i\} \quad \text{----- (8)}$$

ここで、頂点に作用する力を $\{F\}$ とすれば、 $\{F\}$ による補正仕事 W は、 $W = \{u_i\}^T \{F\}$ で表わされるゆえ、ポテンシャル エネルギー π は次式で与えられる。

$$\pi = U - W = U - \{u_i\}^T \{F\} \quad \text{----- (9)}$$

式(9)に式(8)を代入し、ポテンシャル エネルギー最小の原理 $\frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0$ を適用すれば、結局次式がえられる。

$$[C]^{-1} [H] [C]^{-1} \{u_i\} = \{F\} \quad \text{----- (10)}$$

よって式(10)より、所要の *Stiffness Matrix* $[k]$ が次式で求められる。

$$[k] = [C]^{-1} [H] [C]^{-1} \quad \text{----- (11)}$$

明らかに式(11)に基づく従来の有限要素法では、変形の連続性が頂点においてのみ満足され、板の周辺では考慮されていない。そこで著者は、かかる難点を排除する一法として、遷異法を選び、図-2のごとく板要素の周辺に不静定力を作用させ、その影響を考慮した *Stiffness Matrix* の誘導を下記のごとく行なった。

ここで、対象を二次元問題に限定し、矩形板要素について考えてみる。いま、不静定力 $\{G\}$ による変形成分の補正量を $\{u_g\}$ 、式(1)によるそれを $\{u_0\}$ とすれば、板要素の内部変形成分 $\{u\}$ は次式で与えられる。

$$\{u\} = \{u_0\} + \{u_g\} \quad \text{----- (12)}$$

ここに、 $\{u_0\}$ は、

$$\{u_0\} = [M] \{\alpha\} = [M] [C]^{-1} \{u_0\} \quad \text{----- (13)}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1, x, y, xy, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, x, y, xy \end{bmatrix},$$

$$\{\alpha\} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)^T$$

$$\{u_0\} = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4)^T$$

一方、図-3(a)のごとく頂点 1, 2, 3, 4 を固定し、次いで板要素を適当な数に小分割したうえで、不静定力を外力と見做せば、式(11)より $\{u_g\}$ が板要素の変形成分として一般的に下記のごとく決定される。

すなわち、全分割節点において力に関する釣り合い方程式を立てれば、式(11)より次の剛性方程式をうる。

$$[S] \{u_g\} = \{G\} \quad \text{----- (14)}$$

全分割節点の変形成分 $\{u_g\}$ を各分割板 i ($i = a, b, c, \dots$) の頂点のそれである $\{u_{ai}\}$ に変換する行列を $[T_i]$ とすれば、

$$\{u_{ai}\} = [T_i] \{u_g\} \quad \text{----- (15)}$$

式(14), (15)より

$$\{u_{ai}\} = [T_i] [S]^{-1} \{G\} \quad \text{----- (16)}$$

特に正方形板要素を 2×2 に等分割した場合の $[T_a], \dots, [T_b]$ および $[S]$ は次のごとき内容となる。

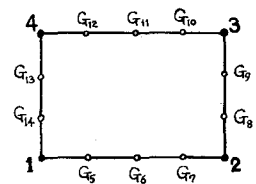


図-2

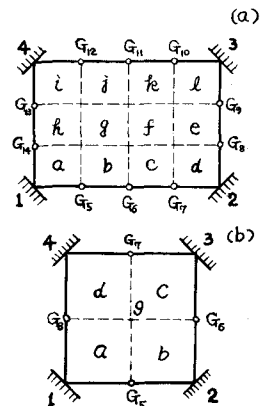


図-3

$$\begin{aligned} \{u_{a0}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_8 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = [T_a] \begin{Bmatrix} u_q \\ u_E \end{Bmatrix}, & \{u_{b0}\} = \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_2 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_9 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = [T_b] \begin{Bmatrix} u_q \\ u_E \end{Bmatrix}, \\ \{u_{c0}\} = \begin{Bmatrix} u_7 \\ u_6 \\ u_3 \\ u_7 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = [T_c] \begin{Bmatrix} u_q \\ u_E \end{Bmatrix}, & \{u_{d0}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_7 \\ u_7 \\ u_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = [T_d] \begin{Bmatrix} u_q \\ u_E \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\{u_q\}$: 不静定力が作用する節点の節点変位,
 $\{u_E\}$: 不静定力が作用しない節点の節点変位.

$$\{S\} = \begin{bmatrix} k_{11}+k_{22} & k_{13} & & k_{24} & k_{23}+k_{14} \\ k_{31} & k_{22}+k_{33} & & & k_{21}+k_{34} \\ & k_{42} & k_{33}+k_{44} & k_{31} & k_{32}+k_{41} \\ k_{42} & & k_{13} & k_{14}+k_{11} & k_{12}+k_{13} \\ k_{32}+k_{41} & k_{22}+k_{43} & k_{23}+k_{14} & k_{21}+k_{34} & k_{11}+k_{22}+k_{33}+k_{44} \end{bmatrix}, \{f\} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} = [C^{-1}][H][C^{-1}]$$

式(16)を用いれば $\{u_q\}$ が $\{u_0\}$ の場合と同様に下記の式で求められる。

$$\{u_q\} = [M_i][C_i]^{-1}\{u_{i0}\} = [M_i][C_i]^{-1}\{t_i\}[G] = [M_i][t_i][G] \quad (17)$$

ここに、 $\{t_i\} = [T_i][S^{-1}]$, $\{t_i\} = [C_i^{-1}]\{t_i\}$ ただし $[C_i]$, $[M_i]$: 分割板 i の $[C]$ および $[M]$ 行列。

式(12)に式(13)および式(17)を代入すれば、 $\{u_q\}$ を加味した変形成分 $\{u\}$ が次のごとくえられる。

$$\{u\} = [M][C^{-1}]\{u_{i0}\} + [M_i][t_i][G] \quad (18)$$

式(18)よりひずみ成分 $\{E\}$ が次式で求められる。

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B][C^{-1}]\{u_{i0}\} + [B_i][t_i][G] = [L] \begin{Bmatrix} u_{i0} \\ G \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ただし、 $[L] = [BC^{-1}, B_i t_i]$

$[B]$, $[B_i]$: それぞれ $[M]$ および $[M_i]$ を x, y で偏微分してえられる行列である。

一方、応力成分 $\{\sigma\}$ は一般に次式で定義される。 $\{\sigma\} = [D]\{E\} \quad (20)$

式(20)に式(19)を代入して、

$$\{\sigma\} = [D][L] \begin{Bmatrix} u_{i0} \\ G \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここに、

$$[D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ただし、} \quad D' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu: \text{ポアソン比,} \\ E: \text{ヤング率.}$$

以上より、不静定力 $\{G\}$ の影響を考慮した場合の板要素のひずみエネルギーを求めれば、式(6)および式(19),(21)より

$$U = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ G \end{Bmatrix}^T [K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ G \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ G \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ G \end{Bmatrix} \quad \text{ただし, } [K] = [L]^T [D] [L] dV, [L] = [B, C, \sum_i B_i, C_i] \quad (22)$$

ここで、板要素の頂点に作用する力をあらためて $\{F\}$ とし、式(22)にポテンシャルエネルギー最小の原理を適用すれば、外力 $\{F\}$ が頂点の変形成分 $\{U_1\}$ と不静定力 $\{G\}$ によって次のごとく関係づけられる。

$$\{F\} = \frac{\partial U}{\partial U_1} = [K_{AA}]\{U_1\} + [K_{AB}]\{G\} \quad (23)$$

さて、式(23)中の未知数 $\{G\}$ は次のごとく決定される。

すなわち、板要素毎にひずみエネルギー U が式(22)で算定されるゆえ、板全体のひずみエネルギーを U_T とすれば、 $U_T = \sum U$ ----- (24)

で与えられる。よって変形に関する適合条件式を求めれば、変形原理より直ちに不静定量 $\{G\}$ を決定する条件式が次のごとくえられる。

$$\partial U_T / \partial G = 0 \quad (25)$$

3. 解法

図-4に示す片持矩形板を例にとって解法骨子の説明を行なう。いま矩形板は2個の正方形板要素で構成されるものとし、両正方形板要素はいずれも 2×2 に小分割されたものとする。よって、式(22)の $[K]$ は10次の正方行列となり、その小行列 $[K_{AA}]$ および $[K_{BB}]$ はそれぞれ8次および2次の正方行列、また $[K_{AB}]$ および $[K_{BA}]$ はそれぞれ8行2列および2行8列の行列となる。これらの行列を用いて節点1, 2, 3, 4で釣り合い式を求めれば、式(23)より次式がえられる。

$$\begin{bmatrix} A_{12}^I + A_{11}^I & A_{12}^I & A_{13}^I + A_{14}^I & A_{13}^I \\ A_{21}^I & A_{22}^I & A_{23}^I & A_{23}^I \\ A_{32}^I + A_{41}^I & A_{42}^I & A_{33}^I + A_{44}^I & A_{43}^I \\ A_{31}^I & A_{12}^I & A_{34}^I & A_{33}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{22}^I + B_{21}^I \\ B_{22}^I \\ B_{32}^I + B_{41}^I \\ B_{32}^I \end{bmatrix} \{G_5\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ただし、肩字 I, II は板要素 I および II を示す。

また、式(24)の U_T が $\{G_5\}$ について各々偏微分すれば、結局式(25)は次のごとくなる。すなわち、

$$\begin{bmatrix} C_{22}^I + C_{41}^I & C_{22}^I & C_{23}^I + C_{44}^I & C_{23}^I \end{bmatrix} (U_1, U_2, U_3, U_4)^T + [K_{BB} + K_{BB}^T] \{G_5\} = 0 \quad (27)$$

ここに、 $U_i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix}$; $\bar{u}_i, \bar{v}_i$: 節点 i の x および y 方向の変位, $G_5 = \begin{Bmatrix} G_{5x} \\ G_{5y} \end{Bmatrix}$; G_{5x}, G_{5y} : 節点5に働く x および y 方向の不静定力, $F_i = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{Bmatrix}$; F_{ix}, F_{iy} : 節点 i に作用する x および y 方向の外力, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} : それぞれ $[K_{AA}], [K_{AB}]$ および $[K_{BB}]$ の2次の小行列。

式(26), (27)を連立に解けば、未知数 $\{U_1\}$ および $\{G_5\}$ が求められ、さらにこれらの諸量を式(21)に代入すれば、板内部の応力成分も容易に算出することができる。

4. 結語

本論文は板要素の周辺に不静定力を作用させ、従来考慮されていなかった周辺における変形の連続性を回復させることによって、有限要素法の精度の向上を図ったもので、その特長は、1) 不静定力による板要素の変形成分の補正量が、不静定力の如何を問わず常に平衡条件式を満足するものであるゆえ、板の面内および面外変形のいずれの解析にも応用できること、2) 解法骨子は従来の有限要素法に準ずるものであり、従って形状任意の板に広く適用可能であること、などが挙げられる。なお、本研究は、文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

(参考文献) 1) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, M. Graw-Hill, 1967.

2) I. Erganoulis & M. Irons & O.C. Zienkiewicz: Curved, Isoparametric, "Quadrilateral" Elements for Finite Element Analysis, International Journal of Numerical and Structural, Vol. 4 No. 1, January 1968.