

九州大学 正員 山崎徳也

〃 学生員 後藤恵之輔

〃 学生員 〇川島基義

1. 序 八角形孔を有するキャストレーテッド・ビーム(図-1参照)に関する基礎的研究として、さきに著者らは八角形孔を有する矩形板の孔縁応力を算定したが、本研究はこれを拡張して腹部に八角形孔を有し等分布荷重を満載するI型単純ばりの孔縁応力式を誘導し、さらに種々の八角形孔をもつI型ばりの孔縁応力を算出して孔形状および孔の位置が孔縁応力におよぼす影響について比較吟味するものである。

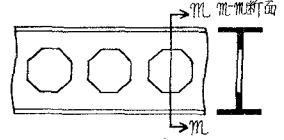


図-1

2. 写像函数 区面上の原点に中心を有する隅を丸めた八角形を区面上の単位円に写像し、かつ八角形の外部と単位円の外部に写像する函数は文献(1)により $A, B, C, \dots$ を実数係数として次式で与えられる。

$$Z = Az + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \frac{E}{z^4} + \frac{F}{z^5} + \dots \quad (\text{有限}) \quad (1)$$

ここに、 $Z = x + iy$, $z = e^{i\beta}$, (x, y) : 直角座標, (α, β) : 直交曲線座標。

式(1)を展開し両辺の実数部と虚数部とをそれぞれ等置して $\alpha = 0$ とすれば孔の境界を定義する次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= (A+B)\cos\beta + C\cos 3\beta + D\cos 5\beta + E\cos 7\beta + F\cos 9\beta + \dots \\ y &= (A-B)\sin\beta - C\sin 3\beta - D\sin 5\beta - E\sin 7\beta - F\sin 9\beta - \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)中の係数について本論では12個の値 $A \sim L$ を決定し、孔縁応力の計算には6個の値 $A \sim F$ を用いることとする。係数決定の条件は式(2)で定義される曲線が任意の曲率半径を有する八角形孔の境界上の一連の点を通ること、ここでこれら諸点を図2に示すが各点の座標値は次のごとくである。

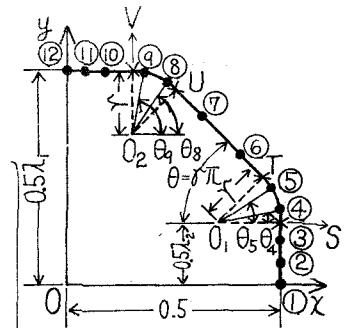


図-2

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.5; & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.5; & y_2 &= \frac{1}{3} 0.14 \\ x_3 &= 0.5; & y_3 &= \frac{2}{3} 0.14 \\ x_4 &= 0.1x + r \cos \theta_4; & y_4 &= 0.1y + r \sin \theta_4 \\ x_5 &= 0.1x + r \cos \theta_5; & y_5 &= 0.1y + r \sin \theta_5 \\ x_6 &= \frac{1}{3} (20.1x + 0.2x) + r \cos \frac{1-2\gamma}{2} \pi; & y_6 &= \frac{1}{3} (20.1y + 0.2y) + r \sin \frac{1-2\gamma}{2} \pi \\ x_7 &= \frac{1}{3} (0.1x + 20.2x) + r \cos \frac{1-2\gamma}{2} \pi; & y_7 &= \frac{1}{3} (0.1y + 20.2y) + r \sin \frac{1-2\gamma}{2} \pi \\ x_8 &= 0.2x + r \cos \theta_8; & y_8 &= 0.2y + r \sin \theta_8 \\ x_9 &= 0.2x + r \cos \theta_9; & y_9 &= 0.2y + r \sin \theta_9 \\ x_{10} &= \frac{2}{3} 0.2x; & y_{10} &= 0.5 \lambda_1 \\ x_{11} &= \frac{1}{3} 0.2x; & y_{11} &= 0.5 \lambda_1 \\ x_{12} &= 0; & y_{12} &= 0.5 \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし $0.1x = 0.5 - r$, $0.1y = 0.5 \lambda_2 - r \tan \frac{1-2\gamma}{2} \pi$; $0.2x = 0.5 - 0.5 (\lambda_1 - \lambda_2) \cot \frac{\gamma}{2} \pi - r \tan \frac{\gamma}{2} \pi$, $0.2y = 0.5 \lambda_1 - r$;

$$S_x = O_{1x} + r, S_y = O_{1y}; T_x = O_{1x} + r \cos \frac{1-2\gamma}{2}\pi, T_y = O_{1y} + r \sin \frac{1-2\gamma}{2}\pi;$$

$$U_x = O_{2x} + r \cos \frac{1-2\gamma}{2}\pi, U_y = O_{2y} + r \sin \frac{1-2\gamma}{2}\pi; V_x = O_{2x}, V_y = O_{2y} + r$$

ここに孔は単位幅 $w=1$, 高さ $d_1=\lambda_1, d_2=\lambda_2$ で隅半径は r とする。式(3)と式(2)に代入することにより未定係数 $A \sim f$ および β_1, β_2 に関する22元連立方程式がえられ, Newtonの反復解法により決定されることとなる。なお $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ として $\pi/2, \pi/6, \pi/3, 5\pi/12$ の値をとる。

3. 等分布荷重を満載するI型単純ばりの孔縁応力式の誘導 図3について孔より充分遠く離れた位置での二次元応力は次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{8}{21} \{ (l^2 - x^2) y_1 + \frac{2}{3} y_1^3 - \frac{2}{3} C^* y_1 \}, \sigma_y = \frac{8}{21} \{ \frac{1}{3} y_1^3 - C^* y_1 - \frac{2}{3} C^* \} \\ \tau_{xy} &= \frac{8}{21} (C^* - y_1^2) x_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに, $l: 1/2$ スパン, I : もとの孔がないI型ばりの中立軸に関する断面2次モーメントで C^* は次式で与えられるものである。 $C^* = I^2 (1 + \frac{2b t_f}{t_w l})$

また直角座標における応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は KoloSov-Muskhelishvili の公式によって複素ポテンシャル函数 $\Phi(z)$ と $\bar{\Psi}(z)$ とにより次式のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2(\Phi(z) + \bar{\Psi}(z)) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2(z\Phi'(z) + \bar{\Psi}(z)) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{ここに } \bar{z} = x - iy, \quad ' = \frac{\partial}{\partial z}$$

一方, 複素ポテンシャル函数 $\Phi(z), \bar{\Psi}(z)$ は一般に次式で表わされる。

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad \bar{\Psi}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (6)$$

$x_1 = x + u$ (u : スパン中央より孔中心までの距離), $y_1 = y$ であることを考慮して, 式(4)および式(6)を式(5)に代入することにより未定係数 A_n, B_n が決定され, ポテンシャル函数 $\Phi(z), \bar{\Psi}(z)$ が次式のごとくえられることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{8i}{21} \left[-\frac{1}{12} z^4 - \frac{u}{3} z^3 + \frac{1}{2} (l^2 - u^2 + \frac{2C^*}{3}) z^2 + \frac{2C^*}{3} iz \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \\ \bar{\Psi}(z) &= -\frac{8i}{161} \left[-\frac{1}{2} z^4 - \frac{4u}{3} z^3 + (l^2 - u^2 - \frac{17C^*}{3}) z^2 - 8C^* (u + \frac{C^*}{3}) z \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

キャストレーテッド・ビームの孔縁は通常何ら外力の作用しない自由表面であるゆえ, 境界条件式として次式が成立する。

$$\varphi(\sigma) + \frac{z(\sigma)}{z(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}(\bar{\sigma}) = 0 \quad (8)$$

$$\text{ここに } \Phi(z) = \Phi[z(\zeta)] = \varphi(\zeta), \quad \bar{\Psi}(z) = \bar{\Psi}[z(\zeta)] = \psi(\zeta), \quad \sigma = (\zeta)_{\sigma=0} = e^{i\theta} \quad (9)$$

式(1)および式(7)を式(9)の変換式を用いて σ の函数とし, これらを式(8)に代入すれば次式がえられる。

$$\begin{aligned} & \varphi(\sigma) + \left(\frac{C_1}{\sigma} + \frac{C_3}{\sigma^3} + \frac{C_5}{\sigma^5} + \frac{C_7}{\sigma^7} + \frac{C_9}{\sigma^9} \right) \left[\frac{8i}{21} A \left\{ \frac{1}{3} (3UAB + i2C^*) + 2A \left\{ \frac{1}{3} AB - \frac{1}{2} \left(\frac{3C^*}{5} + l^2 - u^2 \right) \right\} \frac{1}{\sigma} + \frac{4A^2}{\sigma^2} + \frac{A^3}{\sigma^3} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n \sigma^{n+1}}{n!} \right] \\ & - \frac{8i}{161} A \left\{ 4(\bar{3}C^* + 24C) - 2(l^2 - u^2 - \frac{17C^*}{3}) \frac{1}{\sigma} + A \left\{ 2AB - (l^2 - u^2 - \frac{17C^*}{3}) \right\} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{4A^2}{3\sigma^3} + \frac{A^3}{2\sigma^4} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \bar{b}_n \sigma^n}{n!} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

ここに $C_1, C_3, \dots, C_9$: 文献(1)参照

式(10)の両辺に $d\sigma/2\pi i (\sigma - \zeta)$ を乗じ, Cauchyの定理を用いて積分すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{8i}{21} A \left\{ \frac{A}{6} (3\bar{3}C^* + 24C) - B \left(\frac{3C^*}{5} + l^2 - u^2 \right) + \frac{1}{3} (2UAB - i2C^*) \zeta + A \left\{ \frac{1}{3} AB - \frac{1}{2} \left(\frac{3C^*}{5} + l^2 - u^2 \right) \right\} \zeta^2 + \frac{4A^2}{3} \zeta^3 + \frac{A^3}{12} \zeta^4 \right\} \\ & - \frac{8i}{21} A \left\{ \frac{1}{3} (3UAB + i2C^*) \left(\frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_3}{\zeta^3} + \frac{C_5}{\zeta^5} + \frac{C_7}{\zeta^7} + \frac{C_9}{\zeta^9} \right) + 2A \left\{ \frac{1}{3} AB - \frac{1}{2} \left(\frac{3C^*}{5} + l^2 - u^2 \right) \right\} \left(\frac{C_2}{\zeta^2} + \frac{C_4}{\zeta^4} + \frac{C_6}{\zeta^6} + \frac{C_8}{\zeta^8} + \frac{C_{10}}{\zeta^{10}} \right) \right. \\ & + \frac{4A^2}{\zeta^3} \left(\frac{C_3}{\zeta^3} + \frac{C_5}{\zeta^5} + \frac{C_7}{\zeta^7} + \frac{C_9}{\zeta^9} \right) + \frac{A^3}{\zeta^4} \left(\frac{C_4}{\zeta^4} + \frac{C_6}{\zeta^6} + \frac{C_8}{\zeta^8} + \frac{C_{10}}{\zeta^{10}} \right) \left. \right\} + \bar{a}_1 \left(\frac{C_3}{\zeta^3} + \frac{C_5}{\zeta^5} + \frac{C_7}{\zeta^7} + \frac{C_9}{\zeta^9} \right) + 2\bar{a}_2 \left(\frac{C_4}{\zeta^4} + \frac{C_6}{\zeta^6} + \frac{C_8}{\zeta^8} \right) \\ & + 3\bar{a}_3 \left(\frac{C_5}{\zeta^5} + \frac{C_7}{\zeta^7} + \frac{C_9}{\zeta^9} \right) + 4\bar{a}_4 \left(\frac{C_6}{\zeta^6} + \frac{C_8}{\zeta^8} \right) + 5\bar{a}_5 \left(\frac{C_7}{\zeta^7} + \frac{C_9}{\zeta^9} \right) + 6\bar{a}_6 \frac{C_8}{\zeta^8} + 7\bar{a}_7 \frac{C_9}{\zeta^9} + \frac{8i}{161} A \left\{ 4[UAB \right. \\ & + 2C^* \zeta (u - \frac{1}{3} C^*)] \frac{1}{\zeta} + A \left\{ 2AB - (l^2 - u^2 - \frac{17C^*}{3}) \right\} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{4A^2}{3\zeta^3} + \frac{A^3}{2\zeta^4} \left. \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

式(7)の至(8)を式(9)によりらの函数としたものと式(11)とについてらの同一べき数の係数を比較すれば、未定係数 $a_1 \sim a_{12}$ に関する連立方程式がえられ、これを解くことにより $a_1 \sim a_{12}$ が次のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{8}{81} A \left(\frac{2}{3} C^3 a_1' + i u A a_1' \right), & a_2 &= \frac{8}{81} A i A a_2', & a_3 &= \frac{8}{81} A \left(\frac{2}{3} C^3 a_3' + i u A a_3' \right), & a_4 &= \frac{8}{81} A i A a_4' \\ a_5 &= \frac{8}{81} A \left(\frac{2}{3} C^3 a_5' + i u A a_5' \right), & a_6 &= \frac{8}{81} A i A a_6', & a_7 &= \frac{8}{81} A \left(\frac{2}{3} C^3 a_7' + i u A a_7' \right), & a_8 &= -\frac{8}{81} A i 2 A a_8' \\ a_9 &= -\frac{8}{81} A (a_9' + i a_9'), & a_{10} &= -\frac{8}{81} A i a_{10}', & a_{11} &= \frac{8}{81} A (a_{11}' + i a_{11}'), & a_{12} &= -\frac{8}{81} A i a_{12}' \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

ここに $a_1', a_2', \dots, a_{12}'$ は $A, B, \dots, L, C, C_3, \dots, C_9, l, C^*$ および u の函数である。

したがって、所要のポテンシャル函数 $\Phi(\zeta)$ が次式のごとく決定される。

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= -\frac{8i}{81} A \left\{ \frac{A}{6} (3B^2 + 2AC) - B \left(\frac{2}{3} C^3 + l^2 - u^2 \right) + \frac{1}{3} (3uAB + i 2 C^3) \right\} \zeta + A \left\{ \frac{1}{3} AB - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} C^3 + l^2 - u^2 \right) \right\} \zeta^2 \\ &\quad + \frac{u A^2}{3} \zeta^3 + \frac{A^3}{12} \zeta^4 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{a_{12}}{\zeta^{12}} \dots (13) \end{aligned}$$

次に、このポテンシャル函数と式(1)の写像函数とを用いて孔縁応力 $(\sigma_p)_{\alpha=0}$ が次式で決定される。

$$(\sigma_p)_{\alpha=0} = 2 \left[\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta(\sigma)} + \frac{\overline{\Phi(\zeta)}}{\overline{\zeta(\sigma)}} \right] \dots (14)$$

式(1)と式(13)とを式(14)に代入のうえ整理すれば、所要の孔縁応力が次式のごとくえられることとなる。

$$\begin{aligned} J_0^2 \left[\frac{(\sigma_p)_{\alpha=0}}{894 \frac{A}{l}} \right] &= \frac{A}{60} \left(\frac{C^3}{l^3} \right) (A_0 + B_2 \cos 2\beta + B_4 \cos 4\beta + B_6 \cos 6\beta + B_8 \cos 8\beta + B_{10} \cos 10\beta) \\ &\quad + \frac{A}{60} \left(\frac{u}{l} \right) \left(\frac{C^3}{l^3} \right) (A_2 \sin 2\beta + A_4 \sin 4\beta + A_6 \sin 6\beta + A_8 \sin 8\beta) \\ &\quad + \frac{A}{60} \left(\frac{1}{l} \right) \left(\frac{C^3}{l^3} \right) (A_1 \sin \beta + A_3 \sin 3\beta + A_5 \sin 5\beta + A_7 \sin 7\beta + A_9 \sin 9\beta + A_{11} \sin 11\beta) \dots (15) \end{aligned}$$

ここに J_0^2 : 文献(1)参照, l_0 : 長さの次元をもつ一定量, $A_0 = 10A + 10B_1 + 90CA_5 + 250DA_5 + 490EA_7 - 810FC_9$,

$A_1 = \left[-9 - 15 \left(\frac{B}{l} \right)^2 \left(\frac{C^3}{l^3} \right) + 15 \left(\frac{u}{l} \right)^2 \left(\frac{C^3}{l^3} \right) \right] (A^2 + 12AF_C - 56AE_C - 90AF_C) + 30A_2^2 (B - 3C) + 60A_4^2 (3C - 5D) + 90A_6^2 (5D - 7E), \dots$,

$A_2 = \left[-9 - 15 \left(\frac{B}{l} \right)^2 \left(\frac{C^3}{l^3} \right) + 15 \left(\frac{u}{l} \right)^2 \left(\frac{C^3}{l^3} \right) \right] (10A^2 C_9 - 9AF), B_2 = -10B - 10A_1 (A - 3C) + 30A_3^2 (B + 5D) + 50A_5^2 (3C + 7E) + 70A_7^2 (5D + 9F)$

$- 630EC_9, B_4 = -30C + 50DA_1 - 30A_3^2 (A - 7E) + 50A_5^2 (B + 9F) + 210C A_7 - 450DC_9, \dots, B_{10} = -90F + 90AC_9$

4. 計算例および考察 2. に求められた写像函数の係数 $A \sim F$ を用い、傾斜辺の角度 $\theta = 37^\circ \sim 59^\circ$

(1°刻み)、孔の高さ h と幅の比 $\lambda_1 = 0.55 \sim 1.15$ (0.1刻み)、孔の垂直辺の高さと幅の比 $\lambda_2 = 0.264 \sim 0.864$ (0.1刻み) の各種八角形孔を有する I 型単純ばりの孔縁応力を算定し、孔縁応力の分布則を第1, 第2象限について β を変数として図4～図6に図示した。なお、隅半径は $r = r/w = 0.1$ とし、スパンヤ断面に関して $l/l = 35, l/w = 0.866, b/l, h/lw = 4.575$ を用いた。図7～図9は孔縁の最大応力を θ, λ_1 および λ_2 を変数として各孔の位置についてプロットしたものであり、その考察を述べれば大略以下のごとくである。

(1) Case (a): $u/l = 0$ すなわち曲げモーメントのみが作用する荷重場には孔が存在する場合、 θ, λ_2 の如何にかかわらず最大応力はほぼ一定であるが、 λ_1 の増加に伴い急速に増大する。したがって、曲げモーメントが卓越するごときキャストレーテッド・ビームにおいては、 θ, λ_2 の大きさに関係なく、 λ_1 をできる限り小さくする方が応力集中を避ける意味から有利である。

(2) Case (c):

$u/l = 0.8$ すなわちせん断力が卓越する場合には $\theta = 43^\circ$ 近傍において最大応力は最

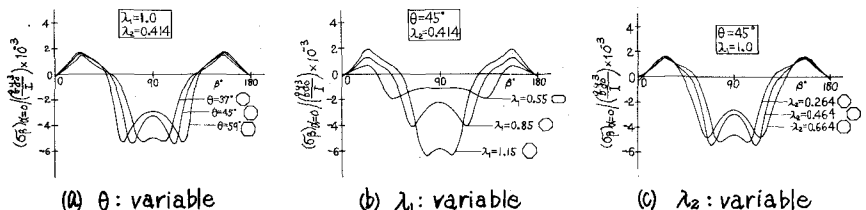


図-4 $u/l = 0$ のときの孔縁応力

い値を示し、 λ_1 の増加および λ_2 の減少にしたがって急減する。これよりせん断力が卓越するごときキャストレーテッド

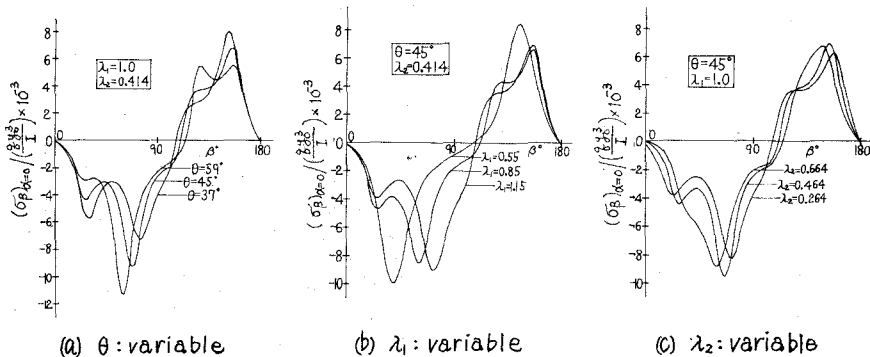


図-5 $u/l = 0.4$ のときの孔縁応力

ビームにおいては、 $\theta = 45^\circ$ とし λ_1 を大きくするかあるいは λ_2 を小さくする方が応力集中に関して有利である。

(3) Case (b): $u/l = 0.4$ すなわち曲げモーメントおよびせん断力が一般的に作用する場合は、 λ_1 の如何にかかわらず最大応力はほぼ一定であるが、 θ および λ_2 が小さいほどその値は小さい。したがって、かかる荷重場にあるキャストレーテッドビームにおいては、 λ_1 の大きさに関係なく、 λ_2 をできるだけ小さくすることにより応力集中が避けられることとなる。

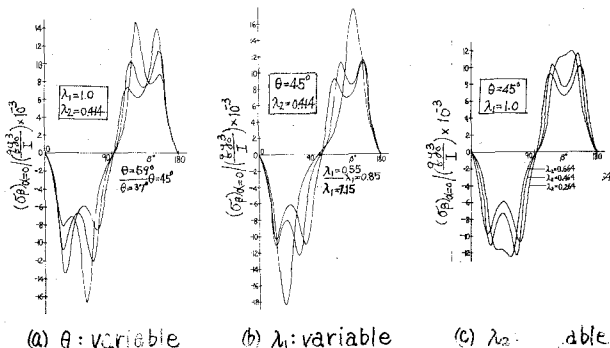


図-6 $u/l = 0.8$ のときの孔縁応力

5. 結び 本論は腹部に種々の八角形孔を有し等分布荷重を満載するI型単純ばりの孔縁応力を複素変数法により求め、いかなる孔形状にすれば応力集中が避けられるかについて論じたものである。式(4)の孔縁応力式は本論にとりあげた八角形孔のみならず円孔と初め矩形孔、六角形孔など、y軸に関して対称な任意形孔の場合にも適用しうることには論を俟たない。なお本研究の進行中にI型単純ばりの孔縁応力についてJ.E. Bowerの論文²⁾が発表されたが、本論とは変換函数が異なり、適用範囲も限られる難点をもつた他、孔形状に対する吟味考察にも及んでいない。最後に本研究には文部省科学研究費の補助をうけたことを付記する。

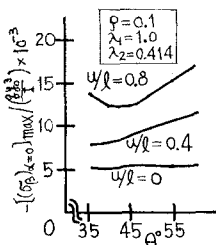


図-7

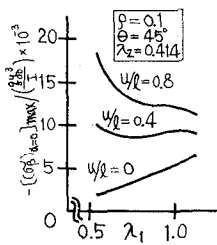


図-8

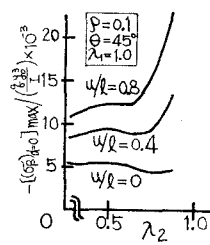


図-9

1) 山崎俊彦：八角形孔を有する矩形板の孔縁応力，九工学集報，42-2（未発表）。

2) J.E. Bower: Experimental Stresses in Wide-Flange Beams With Holes, Proc. ASCE, 92-ST5, Oct. 1966.