

(周囲が単純支持され、中間にて点支持される場合)

九州大学 正員 山崎 徳也
長崎大学 〃 橋本 武
九州大学 嘱員 〇山田喜四夫

1. 緒言

周辺でのみ支持される矩形板の座屈に関しては多くの既往研究があるが、無梁板のそれは未だ見当らない。本研究は、著者らが先に発表した無梁板の自由振動解析²⁾に用いた応力法を無梁板の安定問題に応用拡張したものである。すなわち、周辺で単純支持され、かつ、中間で任意配列したがつて任意間隔に点支持される等方性等断面の矩形無梁板の座屈の厳密解を求め、かかる構造物の安定問題の解析ならびに設計に資せんとするものである。

2. 解法

(1) 一般解の誘導

図-1に示すごとく、スパン a 、 b の矩形板において、辺 AB に沿って x 軸、辺 AD に沿って y 軸、紙面に直交して z 軸をもつ直交座標系 (x, y, z) を導入する。また、板は周辺で単純支持され、かつ、中間にて任意配列の点支持で点支持されているものとし、各点に点番号 $11, 12, \dots, 1S, 21, 22, \dots, 2S, \dots, ij, \dots, kl, \dots, r1, r2, \dots, rS$ を付す。

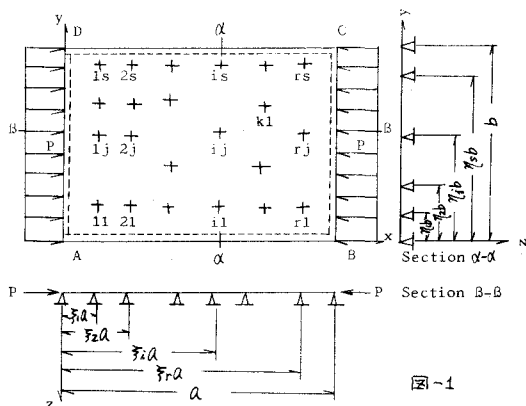


図-1

一般に、無梁板の安定問題として x 方向あるいは y 方向の荷重を受ける一方向圧縮、および、 x 、 y 方向ともに荷重を受ける二方向圧縮、さらに、せん断座屈が考えられるが、本研究では、 x 方向圧縮について論ずることとする。

x 方向に単位長さ当たり P なる一様圧縮力を受け、無梁板が曲げ変形を起すとき、板が中間点から受ける点支持反力をも荷重とみなせば無梁板の座屈の基礎微分方程式は、板に面内圧縮力と垂直荷重が同時に作用する場合の基礎微分方程式と同じく次式で表わされる。

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, y) \quad (1)$$

ここに、 D : 板剛度、 w : 板のたわみ、 $f(x, y)$: 板面に対して垂直に作用する荷重。

式(1)の一般解 w はその齊次方程式からえられる余函数 w_1 、特殊解を w_0 とすれば両者の和で与えられる。いま、 w_1 を次のごとく仮定する。

$$w_1 = X(\xi) \sin N\pi\eta + Y(\eta) \sin M\pi\xi \quad \text{ただし } \xi = x/a, \eta = y/b, M, N = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

式(2)を式(1)の齊次方程式に代入のうえ、 $X(\xi), Y(\eta)$ の一般解を求めれば、それを次のごとくえられる。

$$\textcircled{1} \quad \lambda > 2\left(\frac{N^2\pi}{a}\right) \quad X(\xi) = A_1 \sin \lambda_1 \xi + B_1 \cos \lambda_1 \xi + C_1 \sin \lambda_2 \xi + D_1 \cos \lambda_2 \xi$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = 2\left(\frac{N^2\pi}{a}\right) \quad X(\xi) = (A_1 + B_1 \xi) \sin \frac{N\pi}{a} \xi + (C_1 + D_1 \xi) \cos \frac{N\pi}{a} \xi$$

$$\left. \begin{array}{ll} \textcircled{3} \quad \lambda < 2(N\pi/\mu) & X(\xi) = A_x e^{\overline{K}\xi} \sin \frac{\lambda}{2} \xi + B_x e^{\overline{K}\xi} \cos \frac{\lambda}{2} \xi + C_x e^{-\overline{K}\xi} \sin \frac{\lambda}{2} \xi + D_x e^{-\overline{K}\xi} \cos \frac{\lambda}{2} \xi \\ Y(\eta) : \textcircled{1} \quad \lambda < M\pi & Y(\eta) = A_y \sinh K_1 \eta + B_y \cosh K_1 \eta + C_y \sinh K_2 \eta + D_y \cosh K_2 \eta \\ \textcircled{2} \quad \lambda = M\pi & Y(\eta) = A_y + B_y \eta + C_y \sinh \sqrt{2} M\pi \mu \eta + D_y \cosh \sqrt{2} M\pi \mu \eta \\ \textcircled{3} \quad \lambda > M\pi & Y(\eta) = A_y \sin K_3 \eta + B_y \cos K_3 \eta + C_y \sinh K_4 \eta + D_y \cosh K_4 \eta \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\therefore, \quad \lambda^2 = P a^2/D, \quad \mu = b/a, \quad K_1 = \gamma/2 + \sqrt{\lambda^2 - 4(N\pi/\mu)^2}, \quad K_2 = \gamma/2 - \sqrt{\lambda^2 - 4(N\pi/\mu)^2}, \quad \overline{K} = \sqrt{(N\pi/\mu)^2 - \lambda^2/4}, \quad K_3 = \mu/\sqrt{M\pi(M\pi + \lambda)},$$

$$K_4 = \mu/\sqrt{M\pi(M\pi - \lambda)}, \quad K_5 = \mu/\sqrt{M\pi(\lambda - M\pi)}, \quad K_6 = \mu/\sqrt{M\pi(\lambda + M\pi)}, \quad A_x \sim D_x \text{ および } A_y \sim D_y \text{ は積分定数}$$

ところで、四辺単純支持矩形板の固有値入は、 $\lambda > M\pi$ および $\lambda \geq 2(N\pi/\mu)$ なる条件を満足する¹⁾。地方、
 本题の無梁板は周辺単純支持矩形板より構造的に剛であるゆえ、その固有値入に関して

$$\lambda > M\pi, \quad \lambda > 2(N\pi/\mu) \quad (4)$$

であるといえる。したがって、 w_i に関して式(4)からえられる9つの解のうち上記条件式を満足するもののみが物理的意義をもち、結局、余函数 w_0 が式(5)のみで表わされることになる。

$$w_0 = (A_x \sin K_1 \xi + B_x \cos K_1 \xi + C_x \sin K_2 \xi + D_x \cos K_2 \xi) \sin M\pi \eta \\ + (A_y \sin K_3 \eta + B_y \cos K_3 \eta + C_y \sinh K_4 \eta + D_y \cosh K_4 \eta) \sin M\pi \xi \quad (5)$$

つぎに特殊解 w_0 を誘導する。中間支点 i, j の垂直反力を V_{ij} とし、これを二重正弦フーリエ級数に展開すれば次のごとく表わされる。

$$\{V_{ij}\}_{SF} = \frac{4V_{ij}}{\mu a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \cdot \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (6)$$

こゝに、 $\xi_i = x_i/a$, $\eta_j = y_j/b$, $\{ \}_{SF}$ は二重正弦フーリエ級数展開式を意味し、 $[FL^{-2}]$ の次元をもつ。
 式(4)の右辺 $q(x, y)$ は板に作用する垂直荷重であり、本题の無梁板では中間支点反力の総和で与えられるゆえ式(6)をすべての i, j について加え合わせれば次式がえられる。

$$q(x, y) = -\frac{4}{\mu a^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \cdot \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (7)$$

ただし V_{ij} は上向きを正、 $q(x, y)$ は下向きを正とする。

式(7)を式(1)に代入し、さらに、式(7)の函数形を考慮して特殊解 w_0 を二重正弦フーリエ級数で表わされるものと仮定すれば、 w_0 が次式のごとく算定される。

$$w_0 = -\frac{a^4}{\pi^4 \mu D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j}{\{(m^2 + n^2/\mu^2)^2 - (m\lambda/\pi)^2\}} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (8)$$

式(5)と式(8)を加え合わせれば、式(1)の一般解 w が結局、次式のごとく算定されることになる。

$$w = (A_x \sin K_1 \xi + B_x \cos K_1 \xi + C_x \sin K_2 \xi + D_x \cos K_2 \xi) \sin M\pi \eta \\ + (A_y \sin K_3 \eta + B_y \cos K_3 \eta + C_y \sinh K_4 \eta + D_y \cosh K_4 \eta) \sin M\pi \xi \\ - \frac{a^4}{\pi^4 \mu D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j}{\{(m^2 + n^2/\mu^2)^2 - (m\lambda/\pi)^2\}} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (9)$$

(2) 固有値方程式 本题の無梁板は周辺で単純支持されているゆえその境界条件式は次のごとくである。

$$\left. \begin{array}{ll} \xi = 0, 1 \text{ で} & w = 0, \quad M_x = -\frac{D}{a^2} (\partial w / \partial \xi^2 + \nu / \mu^2 \cdot \partial^2 w / \partial \eta^2) = 0 \\ \eta = 0, 1 \text{ で} & w = 0, \quad M_y = -\frac{D}{a^2} (1 / \mu^2 \cdot \partial^2 w / \partial \eta^2 + \nu \cdot \partial^2 w / \partial \xi^2) = 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

したがって、 ν はポアソン係数

式(9)を式(10)に代入すれば以下のごとき連立方程式をうる。

$$\begin{bmatrix} \langle\langle K_0^1 \rangle\rangle & \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44} \\ \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44} & \langle\langle K_0^2 \rangle\rangle \end{bmatrix} \times (A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y)^T = 0 \quad (11)$$

$\langle\langle 0 \rangle\rangle_{44}$: 4×4 の零行列

$$\langle\langle K_0^1 \rangle\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin k_1 & \cosh k_1 & \sin k_2 & \cosh k_2 \\ 0 & k_1^2 & 0 & k_2^2 \\ k_1^2 \sin k_1 & k_1^2 \cosh k_1 & k_2^2 \sin k_2 & k_2^2 \cosh k_2 \end{bmatrix}, \quad \langle\langle K_0^2 \rangle\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sinh k_4 & \cosh k_4 \\ 0 & -k^2 & 0 & k_4^2 \\ -k_4^2 \sinh k_4 & -k_4^2 \cosh k_4 & k_4^2 \sinh k_4 & k_4^2 \cosh k_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

また、無梁板の座屈時における中間点 k の変位を d_{kl} とし、さらに、これら変位量が作用外力に比例するものとし、その比例定数を Y_{kl} とすれば、式をうる。

$$d_{kl} = Y_{kl} \cdot V_{kl} \quad (k=1, 2, \dots; Y: l=1, 2, \dots, S) \quad (12)$$

式(9)の弾性曲方程式は各中間点位置において式(12)に示す変位に等しくなければならぬことより、以下のごとき一連の変形条件式がえられる。

$$W(\xi_k, \eta_l) = Y_{kl} \cdot V_{kl} \quad (k=1, 2, \dots; Y: l=1, 2, \dots, S) \quad (13)$$

式(13)に式(9)を代入してえられる結果と式(11)とを全て連立させれば未知数 $A_x \sim D_x, A_y \sim D_y$ および $V_{kl} (k=1, 2, \dots; Y: l=1, 2, \dots, S)$ を求めるための連立方程式をうるが、定数項はいずれも0である。したがって、未知数 $A_x \sim D_x, A_y \sim D_y$ および V_{kl} のうち少なくとも一つ以上0でない解が存在するためには、上述の連立方程式の係数行列が0でなければならぬことより、いわゆる座屈条件式が以下のごとく与えられ、これより所定の座屈固有値が算定されることになる。

$$\begin{bmatrix} \langle\langle K_0^1 \rangle\rangle & \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44} & \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44}^* \\ \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44} & \langle\langle K_0^2 \rangle\rangle & \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44}^* \\ \langle\langle K_{kl}^1 \rangle\rangle & \langle\langle K_{kl}^2 \rangle\rangle & \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

(Note: The matrix structure in the image is more complex, involving terms like $H_{11}'' + \delta_{11}$, H_{12}'' , $H_{12}'' + \delta_{12}$, etc., which are simplified here for brevity but follow the same pattern.)

$$\text{ここにて} \quad H_{ij}^M = H_{ij}^Y = \sum_{n=1}^S \sum_{m=1}^S \frac{1}{S_{mn}} \sin m \pi \xi_i \sin n \pi \eta_j \cdot \sin m \pi \xi_k \sin n \pi \eta_l, \quad S_{mn} = (m^2 + \frac{n^2}{\lambda^2})^2 - m^2 (\frac{\lambda}{\pi})^2,$$

$$\delta_{kl} = -\frac{\pi^4 \mu D}{4a^2} \delta_{kl}, \quad \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44}^* \text{ は 中間点 } k \text{ の終数 } k \text{ とすれば 4 行行列の 0 行列である。}$$

$$\langle\langle K_{kl}^1 \rangle\rangle = \begin{bmatrix} \sin k_1 \xi_1 \sin n \pi \eta_1 & \cos k_1 \xi_1 \sin n \pi \eta_1 & \sin k_2 \xi_1 \sin n \pi \eta_1 & \cos k_2 \xi_1 \sin n \pi \eta_1 \\ \sin k_1 \xi_2 \sin n \pi \eta_2 & \cos k_1 \xi_2 \sin n \pi \eta_2 & \sin k_2 \xi_2 \sin n \pi \eta_2 & \cos k_2 \xi_2 \sin n \pi \eta_2 \\ \sin k_1 \xi_3 \sin n \pi \eta_3 & \cos k_1 \xi_3 \sin n \pi \eta_3 & \sin k_2 \xi_3 \sin n \pi \eta_3 & \cos k_2 \xi_3 \sin n \pi \eta_3 \\ \sin k_1 \xi_4 \sin n \pi \eta_4 & \cos k_1 \xi_4 \sin n \pi \eta_4 & \sin k_2 \xi_4 \sin n \pi \eta_4 & \cos k_2 \xi_4 \sin n \pi \eta_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \langle K_{\text{Re}}^2 \rangle = & \begin{bmatrix} \sin K_3 \eta_1 \sin M \Pi \zeta_1 & \cos K_3 \eta_1 \sin M \Pi \zeta_1 & \sinh K_4 \eta_1 \sin M \Pi \zeta_1 & \cosh K_4 \eta_1 \sin M \Pi \zeta_1 \\ \sin K_3 \eta_2 \sin M \Pi \zeta_2 & \cos K_3 \eta_2 \sin M \Pi \zeta_2 & \sinh K_4 \eta_2 \sin M \Pi \zeta_2 & \cosh K_4 \eta_2 \sin M \Pi \zeta_2 \\ \sin K_3 \eta_r \sin M \Pi \zeta_r & \cos K_3 \eta_r \sin M \Pi \zeta_r & \sinh K_4 \eta_r \sin M \Pi \zeta_r & \cosh K_4 \eta_r \sin M \Pi \zeta_r \\ \sin K_3 \eta_s \sin M \Pi \zeta_s & \cos K_3 \eta_s \sin M \Pi \zeta_s & \sinh K_4 \eta_s \sin M \Pi \zeta_s & \cosh K_4 \eta_s \sin M \Pi \zeta_s \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. 計算例 図-2 (a) ~ (c) に示すごと

く辺長比 $\mu = b/a = 1.0$ なる周辺単純支持正方形板が中間交点にて支持され、各中間交点の交点以下がない場合の固有値入を式(14)より計算すれば、表-1 (a) ~ (c) 欄に示す諸値をうる。表-1 において右肩に*印を付したものは、周辺単純支持正方形板の固有値群の中に見出されるものであり座屈モードの式形は式(14)のとき周辺単純支持正方形板のそれと一致する。

$$W = A \sin M \Pi \zeta \sin N \Pi \eta \quad (15)$$

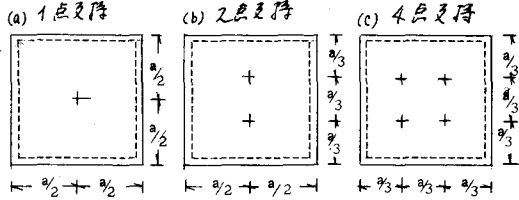


図-2

$\frac{a}{b}$	(a) 1点支持	(b) 2点支持	(c) 4点支持
1	7.8540*	7.8540*	10.4720*
2	10.0721	10.1150	12.3450
3	12.5664*	12.5664*	13.6136*
4	13.3517*	13.3517*	15.0353
5	13.6136*	13.6136*	18.8496*

*印のない固有値群では、式(14)の左辺において全ての要素が0となるごとき列がないゆえ、式(14)における $A_x \sim D_x$, $A_y \sim D_y$ がいふれも0となり、したがって座屈モード式は誤のごとく与えられる。

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_{mn}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 V_{ij} \sin M \Pi \zeta_i \sin N \Pi \eta_j \sin M \Pi \zeta \sin N \Pi \eta \quad (16)$$

$$\text{ただし } \nabla_{\text{Re}} = -\frac{4a^2}{\pi^4 \mu D} \nabla_{\text{Re}}, \quad V_{ij} = \nabla_{ij} / \nabla_0$$

図-2 (a) ~ (c) の各無梁板についての一訳、二訳モードを求めれば図-3 に示すとおりである。

4. 総括 本法を用いれば一方向圧縮力を受ける無梁板の固有値が式(14)を解くことにより厳密に算定できるが、例題にも示したごとく、無梁板の固有値の中、周辺単純支持矩形板のそれと合致するものは式(14)を直接解く必要はなく、既往の座屈算定式から簡単に算出可能である。

また、本法と同様の手法により中間交点で電直反力の他に反力モーメントが生

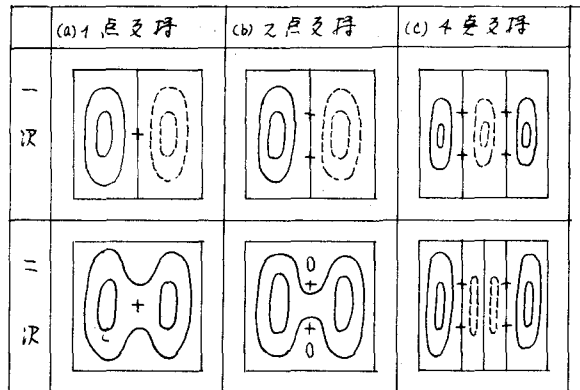


図-3

ずる場合、すなわち、板と柱とが直結する無梁板や、さらには二方向圧縮無梁板の安定問題についても解析可能である。

文献 1) 山口、橋本、高橋：応力法による一方向連続矩形板の解、九州工学集報：第41巻第5号(第42)

2) 山口、橋本：周辺単純支持される無梁板の自由振動、第4回橋梁、構造工学研究発表会(第42)