

九州大学 正員 山崎徳也

〃 正員 彦坂 熙

〃 学生員 古川恒雄

緒言.

近年、直交格子斜桁橋や斜交格子斜桁橋などの架設例を多く見るようになり、必然的にこれら斜橋の上部床版として斜スラブ（平行四辺形スラブ）が用いられるほか、スパンが短い場合には直接斜スラブ橋を架けることも少なくない。しかし斜スラブには、鋭角、鈍角の面隅部における応力集中や浮き上がりなど、矩形スラブの知識だけでは解決の困難な諸問題があり、断面計算や配筋は従来の経験や近似計算に頼っているのが現状である。

本研究は、任意に斜交配筋された斜スラブを斜交異方性斜板と見做して有限要素法により解析し、斜角、配筋量、配筋方向などがスラブの曲げ特性に与える影響を明らかにすることにより、経済的かつ力学的に適切な斜スラブの設計法を確立せんとするものである。

1. 変形量の算定

図-1のごとく、相隣る二辺の長さが a, b なる斜角 α の斜交異方性斜板要素 $A(1-2-3-4)$ を考え、中立面内で二辺に沿って x, y 軸を、また面に垂直下向きに z 軸を設ける。

x 軸と α_1, α_2 の角度をなす二方向を本題のスラブの配筋方向とすれば、これら二方向が斜交異方性の弾性主軸に合致することとなる。

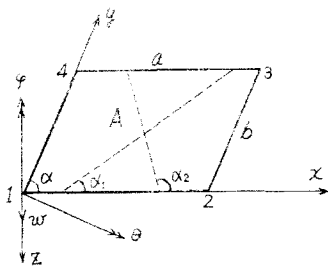


図-1

z 方向のたわみを w とすれば、斜交異方性斜板の曲げの基礎微分方程式は一般に次式で与えられる。

$$H_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + H_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + H_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + H_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + H_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q \sin \alpha \quad (1)$$

ここに $H_1, H_2, \dots, H_5$ は断面定数 q は荷重強度

式(1)の齊次方程式を満足する w として Zienkiewicz が提案した4次多項式は、斜板要素にはそのまま適用できないゆえ、本論では第11項および12項に補正を加えた次式を用いることとする。

$$w = A_1 + A_2 \xi + A_3 \eta + A_4 \xi^2 + A_5 \xi \eta + A_6 \eta^2 + A_7 \xi^3 + A_8 \xi^2 \eta + A_9 \xi \eta^2 + A_{10} \eta^3 + A_{11} (\xi^3 \eta + \eta^3 \xi) + A_{12} (\xi^2 \eta^2 + \eta^2 \xi^2) \quad (2)$$

ただし $w = w/\bar{L}$ ($\bar{L}$ は長さの dimension をもつ任意量)

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b.$$

ϕ_1, ϕ_2 は補正係数, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ は無次元の未知定数

板要素 A の各節点には、式(2)の w に加えて $\theta = -\partial w / \partial y, \quad q = \partial w / \partial x$ の都合3個の変形成分が

あり、これらを $U_i = (\theta \ \varphi \ \omega)^T$ の列ベクトルで表わす。同様にして対応する各節点の外力成分を $F_i = (M_o \ M_y \ P)^T$ とすれば、板要素全体について次の剛性方程式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = [K]^A \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$[K]^A$ は 12×12 の *stiffness matrix* で次式の演算で求められることは周知のとおりである。⁽¹⁾⁽²⁾

$$[K]^A = 4 \lambda \mu (C^{-1})^T \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B^T G B \, d\xi \, d\eta \right\} C^{-1} \quad (4)$$

いま、 $b/a=1$ 、 $\alpha=60^\circ$ 、鉄筋比 $p_{sx}=0.008$ 、 $p_{sy}=0.006$ で、配筋方向がそれぞれ $\alpha_1=0^\circ$ 、 $\alpha_2=60^\circ$ 、と $\alpha_1=0^\circ$ 、 $\alpha_2=90^\circ$ の二種の単鉄筋スラブにつき、コンクリートは全断面有効と仮定し、 $[K]^A$ を算定すれば表-1 および表-2 の結果をうる。

ただし、鉄筋とコンクリートの弾性係数の比 $n=E_s/E_c=10$ とし、ポアッソン比をそれぞれ $\nu_s=0.3$ 、 $\nu_c=0.15$ 、断面の有効高さを d とする。

表-1											
対 称											
$4\lambda\mu E_c d^3 \times$	.3913										
	.0322	.4134									
	-.7829	.8200	4.3384								
	.0821	.0218	-.1658	1.1682							
	-.1539	.3598	1.4474	.4830	1.2093						
	-.1047	-.6836	-1.7529	-1.5320	-1.5878	4.3384					
	.0811	-.0385	-.2424	.3331	.0179	-.6452	.3939				
	-.0367	.0789	.2459	-.1519	.0805	-.1055	.0323	.4114			
	.2451	-.2534	-.9196	1.3916	-.1595	-1.6659	.7856	-.8197	4.3384		
	.3331	-.1519	-1.3943	.1145	-.2065	-.3036	.0794	.0159	.1632	1.1709	
	.0179	.0860	.1595	-.2065	.1048	-.2999	-.1539	.3527	-1.4474	.4830	1.2093
	.6425	.1170	-1.6659	.3062	.2999	-.9196	.1020	.6793	-1.7529	1.5347	1.5878
											4.3384

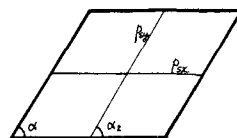
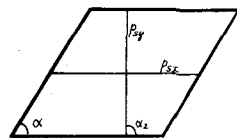


表-2											
対 称											
$4\lambda\mu E_c d^3 \times$	.4070										
	.0296	.4099									
	-.8350	.8323	4.4826								
	.0633	.0108	-.1526	1.2619							
	-.1695	.3555	1.4970	.5264	1.2634						
	-.0627	-.6731	-1.7892	-1.6429	-1.6530	4.4826					
	.0642	-.0352	-.2209	.3632	.0207	-.6769	.4049				
	-.0365	.0796	.2520	-.1644	.0782	-.0960	.0294	.4114			
	.2187	-.2469	-.9577	1.4870	-.1648	-1.7356	.8329	-.8332	4.4826		
	.3632	-.1643	-1.4848	.1071	-.2216	-.3108	.1103	.0156	.1548	1.2598	
	.0207	.0743	.1648	-.2216	.1148	-.3208	-.1695	.3113	-1.4970	.5264	1.2634
	.6791	.0877	-1.7356	.3086	.3208	-.9577	.0649	.6771	-1.7892	1.6408	1.6530
											4.4826

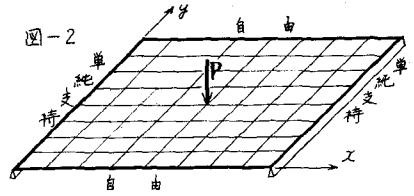


ただし、 $\lambda = \frac{E}{a}$ 、 $\mu = \frac{E}{b}$

図-2のごとく一対辺単純支持、他対辺自由で斜角 $\alpha=60^\circ$ の菱形スラブを 8×8 の要素に分割し、スラブの中央に P なる集中荷重が作用する場合の各節点の変位量を求めてみる。

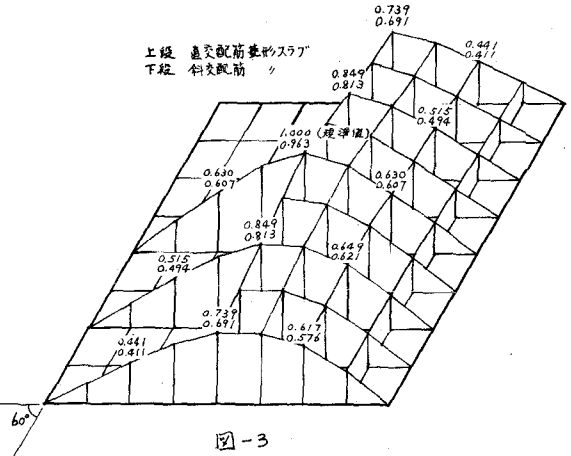
配筋量、配筋方向および弾性定数が表-1 および表-2 の *stiffness matrix* に準ずる二種のス

ラブにつき、構造全体の *stiffness matrix* を作成し、境界条件と対称条件を考慮して行列の次数を減ずれば、それぞれ 105×105 の *stiffness matrix* がえられる。この *stiffness matrix* の逆行列に荷重ベクトルを掛ければ各節点の変形量が求められ、例えばたわみ図が図-3のごとくえられることとなる。なお 105×105 の逆行列演算には東大大型計算機センターの HITAC-5020 E を用いたが、所要時間は 26 秒であった。



2. 断面力の算定

図-1の斜交軸 x, y に関する応力とひずみのベクトルを、鉄筋についてそれぞれ $\{\sigma_s\} = (\sigma_{sx} \ \sigma_{sy} \ \tau_{sxy} \ \tau_{syz})^T$, $\{\epsilon_s\} = (\epsilon_{sx} \ \epsilon_{sy} \ \gamma_{sxy}/2 \ \gamma_{syz}/2)^T$ またコンクリートについてそれぞれ $\{\sigma_c\} = (\sigma_{cx} \ \sigma_{cy} \ \tau_{cxy} \ \tau_{cyz})^T$, $\{\epsilon_c\} = (\epsilon_{cx} \ \epsilon_{cy} \ \gamma_{cxy}/2 \ \gamma_{cyz}/2)^T$ で表わせば、一般に次の応力-ひずみ関係式が成立する。



ここに任意点のひずみベクトル $\{\epsilon\}$ は、 z 方向のスラブのたわみ w により次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_s\} &= [\psi] \{\epsilon_s\} \\ \{\sigma_c\} &= [\zeta] \{\epsilon_c\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに任意点のひずみベクトル $\{\epsilon\}$ は、 z 方向のスラブのたわみ w により次式で表わされる。

$$\{\epsilon\} = z \{\gamma\} \quad (6)$$

$$\text{ただし } \{\gamma\} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^T \quad (7)$$

中立軸に関する鉄筋およびコンクリートのモーメントにそれぞれ $\{M_s\} = (M_{sx} \ M_{sy} \ M_{sxy} - M_{syx})^T$, $\{M_c\} = (M_{cx} \ M_{cy} \ M_{cxy} - M_{cyx})^T$ のベクトル表示を用いれば、式(5),(6),(7)より次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \{M_s\} &= \sum z (\sigma_{sx} \ \sigma_{sy} - \tau_{sxy} - \tau_{syz})^T = [G_s] \{\gamma\} \\ \{M_c\} &= \int z (\sigma_{cx} \ \sigma_{cy} - \tau_{cxy} - \tau_{cyz})^T dz = [G_c] \{\gamma\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし

$$[G_s] = \sum z^2 \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & -\psi_{13} & -\psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & -\psi_{23} & -\psi_{24} \\ -\psi_{31} & -\psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ -\psi_{41} & -\psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} \quad [G_c] = \int z^2 dz \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & -\zeta_{13} & -\zeta_{14} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & -\zeta_{23} & -\zeta_{24} \\ -\zeta_{31} & -\zeta_{32} & \zeta_{33} & \zeta_{34} \\ -\zeta_{41} & -\zeta_{42} & \zeta_{43} & \zeta_{44} \end{bmatrix}$$

よって鉄筋コンクリート断面のモーメント $\{M\}$ が次式で求められることとなる。

$$\{M\} = \{M_s\} + \{M_c\} = [G] \{r\} \quad (9)$$

$$\text{ただし } \{M\} = (M_x \ M_y \ M_{xy} \ -M_{yx})^T, \quad [G] = [G_s] + [G_c]$$

なお有限要素法を用いれば式(9)がさらに次のごとく変形されることは周知のとおりである^{(1),(2)}。

$$\{M\} = \frac{2\sqrt{2}}{ab} [G] [B] [C^T] [u]^A \quad (10)$$

再び図-2の菱形スラブを取りあげ、1. で求めた変形量を式(10)のuに代入すれば、各節点のモーメントが直ちに算定される。

表-1、表-2

に示した二種のスラブ

に加え、比較のためこ

れらと同じ荷重条件、

境界条件および断面定

数をもつ矩形スラブの

結果を合わせて、辺

に平行な8等分線に沿

う M_x , M_y -図を描け

ば、それぞれ図-4、

図-5のごとくである。

斜交配筋と直交配筋

の斜スラブを比較すれ

ば、変形量 断面力と

も後者が3〜4%程度

大きくなる。

結 語

本研究は任意に斜交

配筋された鉄筋コンクリート斜スラブの有限要素法による解析法を提示し、実際に使用頻度の多い一対単純支持、他対辺自由のスラブを対象とする算例と併せ報告したものである。

算例によれば、斜スラブでは特に鋭角側に大きなモーメントが発生し、この付近での応力集中が推測されるゆえ、有限要素法を用いる場合、境界近傍の mesh をスラブ中央より細分するなどの工夫により計算精度を高め、応力を的確に把握することが必要である。

参考文献

- (1) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung; The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs. Proc. Instr. Civ. Engrs. vol.28, August 1964,
- (2) 山崎 彦 坂 右川: 斜交異方性斜板の曲げについて 第23回土木学会年次学術講演概要 昭和43年10月