

## 1. 序言

板はりとして構成される複合構造物の解析に当っては、はりはその軸線で代表される線体と見なされ、節点は幾何学的な点と見なされる。しかるに、実際のはりには幅を有し、節点はある範囲の領域を占め、この部分ははりのそれに比べて著しく高い剛性いわゆる剛域をもっており、その存在を無視することは正しくない。本研究は、かかる剛域の概念を導入して有限要素法によるはりの幅を考慮した有梁板の解析を行ない、剛域無視による従来の方法との比較検討を試みたものである。

## 2. 剛域を考慮した板要素およびはり要素の Stiffness Matrix

図-1に示すごとく周辺に任意の大きさのはりを有する正方形板要素ABCDの Stiffness Matrix を誘導すれば以下のごとくなる。まず板要素の任意の点 $(x, y)$ のたわみを式(1)で、 $x, y$ 両軸回りの回転角をそれぞれ式(2)で定義する。

$$w = \{1 \ x \ y \ x^2 \ x y \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ x y^2 \ y^3\} \{\alpha\}, \dots (1)$$

$$\alpha \theta^x = \{0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -x \ y \ 0 \ -x^2 \ -2xy \ -y^2 \ -x^3 \ -3x^2 y\} \{\alpha\},$$

$$\alpha \theta^y = \{0 \ 1 \ 0 \ 2x \ y \ 0 \ 3x^2 \ 2xy \ y^2 \ 0 \ 3x y \ y^3\} \{\alpha\}, \dots (2)$$

ここに、 $a$ : 板要素の辺長、 $\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{y} = y/a$ ,

$\{\alpha\}$  は  $12 \times 1$  の行列。

また、 $x$ 方向の力および $x, y$ 両軸回りのモーメントをそれぞれ $F^x$ および $M^x/a$ ,  $M^y/a$ で表わせば、板要素の各Nodeの変形成分 $\{U\}$ と一般力 $\{F\}$ との間に、Stiffness Matrix  $[K]$ を媒介として次の関係式が成立する。<sup>1)</sup>

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad \text{----- (3)}$$

ここに、 $\{F\} = \{F_A \ F_B \ F_C \ F_D\}^T$ ,  $\{U\} = \{U_A \ U_B \ U_C \ U_D\}^T$ ,  $F_i = \{F_i^x \ M_i^x/a \ M_i^y/a\}^T$ ,  $U_i = \{w_i^x \ \alpha \theta_i^x \ \alpha \theta_i^y\}^T$ であり、添字 $i (= A, B, C, D)$ は各Nodeの位置を表わす。

次に、図-1の斜線の領域を剛域と考え、剛域周辺に作用する諸力はそのまま剛域の中心に伝わるものとし、各剛域は剛体運動を行なうものと仮定すれば、Vector解析より剛域の中心の一般力および変形成分と各Nodeのそれらとの間には次の関係諸式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} F_{Ag}^x \\ M_{Ag}^x/a \\ M_{Ag}^y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{S}_{Ay} & 1 & 0 \\ \bar{S}_{Az} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A^x \\ M_A^x/a \\ M_A^y/a \end{Bmatrix}, \quad \text{----- (4)}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{Bg}^x \\ M_{Bg}^x/a \\ M_{Bg}^y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{By} & 1 & 0 \\ -\bar{S}_{Bx} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_B^x \\ M_B^x/a \\ M_B^y/a \end{Bmatrix}, \quad \text{----- (6)}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{Cg}^x \\ M_{Cg}^x/a \\ M_{Cg}^y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{S}_{Cy} & 1 & 0 \\ \bar{S}_{Cz} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_C^x \\ M_C^x/a \\ M_C^y/a \end{Bmatrix}, \quad \text{----- (5)}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{Dg}^x \\ M_{Dg}^x/a \\ M_{Dg}^y/a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{Dy} & 1 & 0 \\ \bar{S}_{Dx} & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_D^x \\ M_D^x/a \\ M_D^y/a \end{Bmatrix}, \quad \text{----- (7)}$$

$$\begin{Bmatrix} w_A^x \\ a\theta_A^x \\ a\theta_A^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{S}_{Ay} & \bar{S}_{Ax} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{Ag}^x \\ a\theta_{Ag}^x \\ a\theta_{Ag}^y \end{Bmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

$$\begin{Bmatrix} w_B^x \\ a\theta_B^x \\ a\theta_B^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{S}_{By} & -\bar{S}_{Bx} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{Bg}^x \\ a\theta_{Bg}^x \\ a\theta_{Bg}^y \end{Bmatrix} \quad \text{----- (10)}$$

$$\begin{Bmatrix} w_B^x \\ a\theta_B^x \\ a\theta_B^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{S}_{By} & -\bar{S}_{Bx} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{Bg}^x \\ a\theta_{Bg}^x \\ a\theta_{Bg}^y \end{Bmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

$$\begin{Bmatrix} w_C^x \\ a\theta_C^x \\ a\theta_C^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{S}_{Cy} & -\bar{S}_{Cx} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{Cg}^x \\ a\theta_{Cg}^x \\ a\theta_{Cg}^y \end{Bmatrix} \quad \text{----- (11)}$$

ここに、 $\bar{S}_{ix} = S_{ix}/a$ ,  $\bar{S}_{iy} = S_{iy}/a$ ,  $\bar{S}_{ix}$ および $\bar{S}_{iy}$ はそれぞれNode  $i$  から剛域の中心  $ig$  までの距離の  $x$  方向の成分および  $y$  方向の成分である。

以上の式を一括して行列表示すれば、

$$\begin{Bmatrix} F_{Ag} \\ F_{Bg} \\ F_{Cg} \\ F_{Dg} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \end{Bmatrix} \quad \text{----- (12)}$$

$$\begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} U_{Ag} \\ U_{Bg} \\ U_{Cg} \\ U_{Dg} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (13)}$$

ここに、 $F_{ig} = [F_{ig}^x M_{ig}^x/a M_{ig}^y/a]^T$ ,  $U_{ig} = [w_{ig}^x a\theta_{ig}^x a\theta_{ig}^y]^T$ , ( $i=A, B, C, D$ ),

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{S}_{Ay} & 1 & 0 \\ \bar{S}_{Ax} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{S}_{By} & 1 & 0 \\ -\bar{S}_{Bx} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{Cy} & 1 & 0 \\ -\bar{S}_{Cx} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{Dy} & 1 & 0 \\ \bar{S}_{Dx} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

したがって、式(3)および式(12), (13)より各剛域の中心に関する一般力と変形成分の関係式が次式で求められる。

$$\{F_g\} = [R][K][R]^T \{U_g\} \quad \text{----- (14)}$$

ただし、 $R = \begin{bmatrix} R_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D \end{bmatrix}$ ,  $\{F_g\} = [F_{Ag} F_{Bg} F_{Cg} F_{Dg}]^T$ ,  $\{U_g\} = [U_{Ag} U_{Bg} U_{Cg} U_{Dg}]^T$ .

次に、はりに対しては周知のたわみ角式を用いれば、図-2(a)のはり要素に関して次式が成立する。

$$\{f\} = [f_0] \{u\} \quad \text{----- (15)}$$

ここに、 $\{f\} = [f_A f_B]^T$ ,  $\{u\} = [u_A u_B]^T$ ,  $f_i = [f_i^x m_i^x/a m_i^y/a]^T$ ,  $u_i = [w_i^x a\theta_i^x a\theta_i^y]^T$ , ( $i=A, B$ ).

また、剛域に関する上記仮定により、板要素の場合と同様に次の諸式がえられる。

$$\begin{Bmatrix} f_{Ag}^x \\ m_{Ag}^x/a \\ m_{Ag}^y/a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{S}_A & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_A^x \\ m_A^x/a \\ m_A^y/a \end{Bmatrix} \quad \text{----- (16)}$$

$$\begin{Bmatrix} w_A^x \\ a\theta_A^x \\ a\theta_A^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{S}_A \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{Ag}^x \\ a\theta_{Ag}^x \\ a\theta_{Ag}^y \end{Bmatrix} \quad \text{----- (18)}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{Bg}^x \\ m_{Bg}^x/a \\ m_{Bg}^y/a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{S}_B & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_B^x \\ m_B^x/a \\ m_B^y/a \end{Bmatrix} \quad \text{----- (17)}$$

$$\begin{Bmatrix} w_B^x \\ a\theta_B^x \\ a\theta_B^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{S}_B \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{Bg}^x \\ a\theta_{Bg}^x \\ a\theta_{Bg}^y \end{Bmatrix} \quad \text{----- (19)}$$

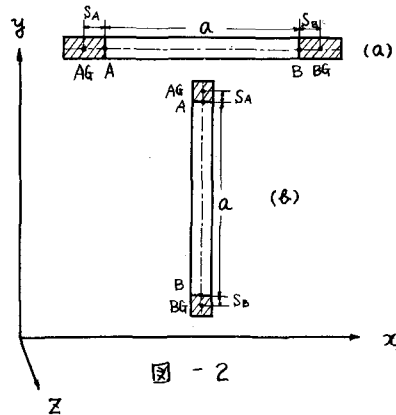


図 - 2

ただし、 $\bar{S}_i = S_i/a$ 、 $S_i$  ははりの材端  $i$  から剛域の中心  $iG$  までのはりの軸線に沿った長さ。

ここで、 $\{f_{iq}\} = \{f_{iq}^x m_{iq}^x/a \ m_{iq}^y/a\}^T$ 、 $\{u_{iq}\} = \{w_{iq}^x a \theta_{iq}^x a \theta_{iq}^y\}^T$ 、 $\{f_g\} = \{f_g^x f_g^y\}^T$ 、 $\{u_g\} = \{u_{Ag} u_{Bg}\}^T$

$R = \begin{bmatrix} R_A & 0 \\ 0 & R_B \end{bmatrix}$ 、 $R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{S}_A & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $R_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{S}_B & 0 & 1 \end{bmatrix}$  とおけば、式(16),(17),(18)および式(19)より次式が成立する。

$$\{f_g\} = [R]\{f\}, \quad \{u\} = [R]^T\{u_g\} \quad \text{-----}(20)$$

したがって、式(15)および式(20)よりはり要素の剛域の中心に関する一般力と変形成分との関係式が次式で求められる。

$$\{f_g\} = [R][K][R]^T\{u_g\} \quad \text{-----}(21)$$

一方、図-2(6)に示す  $y$  方向のはり要素に関しては図-2(4)の  $x$  方向のはりとの間の位置に関する変換行列  $[T]$  を導入すれば、式(21)より次式がえられる。

$$\{f_g\} = [T][R][K][R]^T[T]^T\{u_g\} \quad \text{-----}(22)$$

なお、 $[T]$  の内容は表-1 に示すとおりである。以上により、剛域を考慮した板要素の Stiffness Matrix  $[K_g]$ 、およびはり要素の Stiffness Matrix  $[K_g]$ 、 $[K_g']$  がそれぞれ次式で与えられる。

$$[K_g] = [R][K][R]^T, \quad [K_g] = [R][K][R]^T, \quad [K_g'] = [T][K_g][T]^T \quad \text{-----}(23)$$

表-1

|   |    |   |   |    |   |
|---|----|---|---|----|---|
| 1 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0 |
| 0 | 0  | 1 | 0 | 0  | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 0 | 0  | 0 |
| 0 | 0  | 0 | 1 | 0  | 0 |
| 0 | 0  | 0 | 0 | 0  | 1 |
| 0 | 0  | 0 | 0 | -1 | 0 |

### 3. 解法

いま、板とはりとして構成される複合構造物を考え、全分割節点において式(23)の Stiffness Matrix を用いて一般力の釣合式をたてれば次の剛性方程式がえられる。

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(24)$$

ここに  $F_i = [F_i^x \ M_i^x/a \ M_i^y/a]^T$   
 $U_i = [w_i^x \ a \theta_i^x \ a \theta_i^y]^T$ 、 $n$ : 分割節点の総数。

$$\text{式(24)より} \quad \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & \cdots & K'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{n1} & \cdots & K'_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(25)$$

ここに  $\begin{bmatrix} K'_{11} & \cdots & K'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{n1} & \cdots & K'_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$

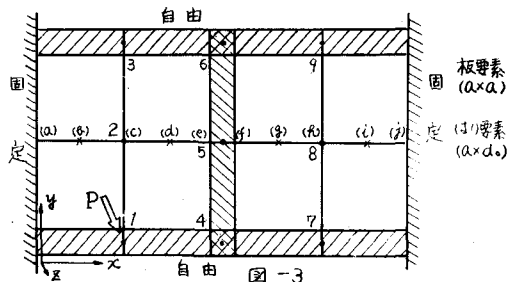
次に弾性支持点  $P_i$  に生じる不静定力を  $F_P, F_Q$  で表わせば、式(25)より次の式(26)が成立する。

$$\begin{Bmatrix} U_P \\ U_Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PQ} \\ K_{QP} & K_{QQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_P \\ F_Q \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K'_{P1} & \cdots & K'_{Pn} \\ K'_{Q1} & \cdots & K'_{Qn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(26)$$

よって、式(26)より弾性支持点  $P_i$  に関する次の変形法公式がえられる。

$$\begin{Bmatrix} F_P \\ F_Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PQ} \\ K_{QP} & K_{QQ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_P \\ U_Q \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PQ} \\ K_{QP} & K_{QQ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K'_{P1} & \cdots & K'_{Pn} \\ K'_{Q1} & \cdots & K'_{Qn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{-----}(27)$$

したがって、弾性支持点にはりおよび柱の連結されている場合は、はりおよび柱に対しては式(21),(22)を、有梁板に対しては式(27)をそれぞれ適用すれば、不静定力  $F_P, F_Q$  の従来の変形法に準じて簡単に決定され、したがって式(21),(22),(24)よりすべての節点の変形成



分が算定可能となる。

4. 計算例

以上の考察に基づいて図-3に示す有梁板の解析を行ない、次の結果を得た。表-2は節点1に鉛直集中荷重Pが作用した場合の板のNodeのねわみを表示したものである。また表-3は同一荷重に対する図-3の(a),(b)点のy軸回りの内部モーメント $M_x^0$ を求めたもので、これを図示すれば、図-4のごとくなる。なお、はりの曲げ剛性は、幅の大きさのいかんにかかわらず一定であると仮定した。

| $d_0/a$ \ 点 | 1     | 2     | 3     | 4 左   | 4 右   | 5 左   | 5 右   | 6 左   | 6 右   | 7     | 8     | 9     |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0           | 7.433 | 2.649 | 0.285 | 8.125 | 8.125 | 3.802 | 3.802 | 0.578 | 0.578 | 3.296 | 1.585 | 0.204 |
| 0.1         | 7.491 | 2.606 | 0.289 | 8.291 | 7.954 | 3.795 | 3.676 | 0.578 | 0.562 | 3.197 | 1.519 | 0.201 |
| 0.2         | 7.509 | 2.560 | 0.298 | 8.445 | 7.751 | 3.782 | 3.550 | 0.584 | 0.555 | 3.095 | 1.454 | 0.199 |

$\times 10^{-2} Pa^3/D_0$ ,  $D_0 = ER^3/12(1-\nu^2)$ ,  $\nu = 0.3$  (ポアソン比) 表-2  
E: ヤング率, R: 板厚

| $d_0/a$ \ 点 | (a)    | (b)    | (c)   | (d)   | (e)   | (f)   | (g)   | (h)    | (i)    | (j)    |
|-------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 0           | -9.481 | -3.871 | 1.956 | 3.546 | 4.921 | 2.946 | 1.071 | -0.850 | -2.616 | -4.407 |
| 0.1         | -9.246 | -3.842 | 1.775 | 3.480 | 4.968 | 2.886 | 0.993 | -0.863 | -2.437 | -4.214 |
| 0.2         | -9.009 | -3.803 | 1.604 | 3.398 | 4.989 | 2.852 | 0.925 | -0.911 | -2.422 | -4.025 |

$\times 10^{-2} P$  表-3

5. 結語

本論文は、はりの幅を剛域と見なし、Vector 解析によって、板とはりの一般力および変形成分と剛域の中心のそれらとの関係諸式を求め、有梁板要素の Stiffness Matrix を式(23)のごとき一般的な形式で誘導したものであり、これを用いれば、はりの幅を考慮したあらゆる有梁板が従来の有限要素法に準じて解析可能となる。本研究の結果、剛域の効果は当然荷重の種類と構造形式に依って異なるが、図-3の計算例では、剛域を考慮した場合の応力が無視の場合の約10%増減し、しかもこの傾向ははりの幅に大きく左右されることが判明した。このことから、はりの寸法が比較的大きな有梁板の解析において、はりの幅を無視することは応力の過小評価あるいは過大評価を余儀なくされ、前者に対しては危険、後者に対しては材料が不経済となり、いずれも正鵠をえていない。

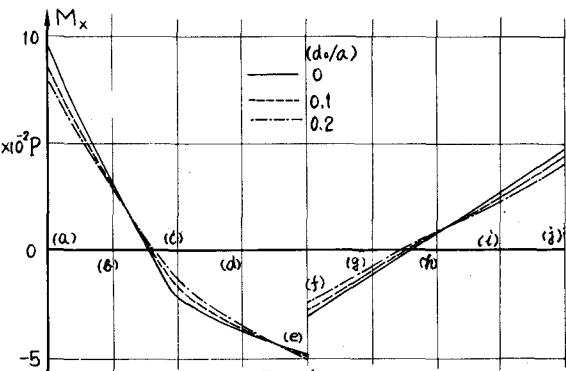


図-4

なお 本研究は、文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献 1) O.C.Zienkiewicz and Y.K.Cheung: The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs; Proc. of the I.C.E., Vol. 28, August 1964