

九州大学 正 員 山崎 徳也

正 員 彦坂 照

学生員 葛城幸一郎

1. 緒言

矩形板の周辺が何らかの拘束を受け、板厚方向の温度分布が不均一な場合に生ずる板の変形と応力の解析は、四辺固定板および四辺単純支持板を除いて極めて困難であり、特に連続板と取り扱った研究は全く見受けられない。しかも単一板に対する既往の解法も、境界条件が変わるごとに特殊な工夫を要する難点があり、連続板を含めた矩形板の温度応力の一般解法の出現が望まれる。

本研究はスパン方向の一对辺が単純支持される一方向連続板が、板厚方向に直線変化する温度分布を受ける場合の曲げ変形および応力の解法を提示したもので、解式誘導の途中において、(i)四辺固定(ii)四辺単純支持(iii)一对辺固定、他対辺単純支持(iv)一边固定、三辺単純支持の各境界条件をもつ板を特例として含むほか、本法の拡張応用により、自由辺を含む任意境界条件の矩形板を一般的に取り扱うる点にすぐれた特色を有するものである。なお不均一温度分布に起因する応力は、一般に面内二次元応力と面外曲げ応力の組み合わせたものであるが、本論文ではこのうち面外応力のみを取り扱うこととする。

2. 一般解の誘導

スパン方向の一对辺が単純支持される幅 b 、板厚 h の一方向連続板から、図-1のごとく節線ADおよびBCで区切られるスパン a の矩形板を取り出し、Aを原点として中立面内で二辺にそって x, y 軸を、また面に垂直下方に z 軸を設ける。いま温度分布が図-2のごとく板厚方向に直線変化するものとすれば、板内の任意点 (x, y, z) の温度分布函数は一般に次式で表わされる。

$$T = T_1(x, y) + \frac{2z}{h} T_2(x, y) \quad (1)$$

ただし本研究では緒言にも述べたごとく、面内応力を無視するゆえ $T_1(x, y) = 0$ において差し支えない。材料の線膨張係数を α 、ポアソン比を ν とすれば、式(1)の不均一温度分布に起因する板の z 方向のたわみ w の微分方程式が次式で与えられる。³⁾

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

また断面に作用する曲げおよび捩りモーメントは次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) \right\} & M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_y &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) \right\} & \text{ただし } D &= \text{板剛度} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

本論では、 $T_2 = \text{const.}$ すなわち温度分布が z のみの函数である場合と考えることとし、式(2)の一般解 w が次式にて表わされるものと仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

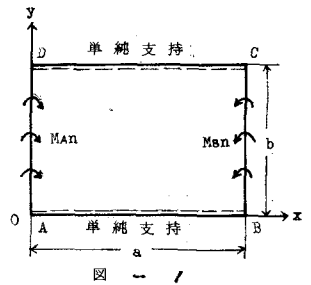


図 - 1

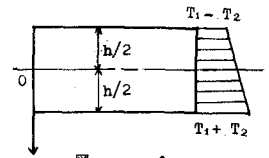


図 - 2

ここに Y_m, X_n はそれぞれ y, x のみの函数である。式(4)を式(3)に代入すれば Y_m および X_n に関する微分方程式がえられ、これらを解いて Y_m, X_n がそれぞれ次のごとく求められる。

$$Y_m = A_m \cosh p_m y + B_m \sinh p_m y + p_m (C_m \cosh p_m y + D_m \sinh p_m y) \quad (5)$$

$$X_n = E_n \cosh g_n x + F_n \sinh g_n x + g_n (G_n \cosh g_n x + H_n \sinh g_n x)$$

ただし $p = \frac{m\pi a}{b}$, $g = \frac{n\pi a}{b}$, $\eta = \frac{y}{b}$, $\xi = \frac{x}{a}$ であり $A_m \sim D_m, E_n \sim H_n$ は境界条件より定まる積分定数である。

3. たわみ角の一般表示

図-1の板の単純支持辺 $y=0$ および $y=b$ における境界条件は次式で与えられる。

$$W = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha T_2}{h} = 0 \quad (6)$$

式(4)を式(6)に代入すれば、積分定数 A_m, B_m, C_m および D_m に関する四元連立一次方程式がえられこれを解いて上記四定数が次のごとく定められる。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= 0 \\ B_m &= -\frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4a^2}{m^3\pi^3} \frac{p(1-\cosh p)}{\sinh^2 p} \\ C_m &= -\frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4a^2}{m^3\pi^3} \frac{(1-\cosh p)}{\sinh p} \\ D_m &= -\frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4a^2}{m^3\pi^3} \end{aligned} \right\} \quad \text{ただし } m=1, 3, 5, \dots \quad (7)$$

節線 $x=0$ および $x=a$ における曲げモーメントがそれぞれ $\sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \frac{n\pi}{b} y$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \frac{n\pi}{b} y$ のごとく正弦フーリエ級数に展開されるものとすれば、これら節線の境界条件は $(W)_{x=0, a} = 0$

$-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha T_2}{h}\right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \frac{n\pi}{b} y$, $-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha T_2}{h}\right)_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \frac{n\pi}{b} y$ で表わされ、式(7)と同様にしつて残りの積分定数が次式で定められる。

$$\left. \begin{aligned} E_n &= 0, \quad F_n = -\frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4a^2}{n^3\pi^3} \frac{g(1-\cosh g)}{\sinh^2 g} - \frac{g^2 g (M_{An} - M_{Bn} \cosh g)}{2Dn^2\pi^2 \sinh^2 g} \\ G_n &= -\frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4a^2}{n^3\pi^3} \frac{(1-\cosh g)}{\sinh g} - \frac{g^2 (M_{Bn} - M_{An} \cosh g)}{2Dn^2\pi^2 \sinh g}, \quad H_n = -\frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4a^2}{n^3\pi^3} - \frac{g^2 M_{An}}{2Dn^2\pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし $n=1, 3, 5, \dots$

次に節線におけるたわみ角も正弦フーリエ級数を用いて次式のごとく表わされるものとする。

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{An} \sin n\pi\eta, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{Bn} \sin n\pi\eta \quad (9)$$

式(9)のオ1式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{An} \sin \frac{n\pi}{b} y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} (F_n + G_n) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (10)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} Y_m$ を正弦フーリエ級数に展開すれば次の結果をうる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} Y_m = \frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cosh g - 1)}{n^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{b} y}{\sinh g} \quad (11)$$

式(8), (11)を式(10)に代入して整理すれば、 θ_{An} が次式にて一般表示されることとなる。

$$\theta_{An} = \frac{b}{2Dn\pi} \frac{\{(\sinh g \cosh g - g)M_{An} + (g \cosh g - \sinh g)M_{Bn}\}}{\sinh^2 g} + \frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4b}{n^2\pi^2} \frac{2(\cosh g - 1)}{\sinh g} \quad (12)a$$

θ_{Bn} も全く同様にしつて求められ、途中の演算を省略して結果のみ示せば次のごとくである。

$$\theta_{Bn} = \frac{b}{2Dn\pi} \frac{\{(\sinh g - g \cosh g)M_{An} + (g - \sinh g \cosh g)M_{Bn}\}}{\sinh^2 g} + \frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4b}{n^2\pi^2} \frac{2(1 - \cosh g)}{\sinh g} \quad (12)b$$

4. 一方向連続板の解法

図-3のごとく一対辺が単純支持されるスパン数 i の一方向連続板を考え、各スパンを左から $a_1, a_2, \dots, a_i$ とする。板材料および温度分布は全スパンにわたって等しいものと仮定したわみ角 θ_{An}, θ_{Bn} 、モー

メント M_{An} , M_{Bn} およびスパン定数 P , δ には各スパンごとに添字 1, 2, $\dots$, i を付すこととすれば、 k スパンの θ_{An} および $k-1$ スパンの θ_{Bn} がそれぞれ式 (12) a, (12) b より次式で与えられる。

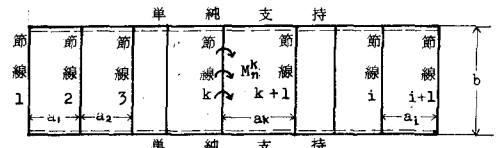


図 - 3

$$\left. \begin{aligned} \theta_{An}^{(k)} &= \frac{\delta}{2D\pi^2} \left\{ \frac{(\sinh \delta_k \cosh \delta_k - \delta_k) M_{An}^{(k)} + (\delta_k \cosh \delta_k - \sinh \delta_k) M_{Bn}^{(k)}}{\sinh^2 \delta_k} + \frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4\delta}{n^2\pi^2} \frac{2(\cosh \delta_k - 1)}{\sinh \delta_k} \right\} \\ \theta_{Bn}^{(k-1)} &= \frac{\delta}{2D\pi^2} \left\{ \frac{(\sinh \delta_{k-1} - \delta_{k-1} \cosh \delta_{k-1}) M_{An}^{(k-1)} + (\delta_{k-1} - \sinh \delta_{k-1} \cosh \delta_{k-1}) M_{Bn}^{(k-1)}}{\sinh^2 \delta_{k-1}} + \frac{(1+\nu)\alpha T_2}{h} \frac{4\delta}{n^2\pi^2} \frac{2(1 - \cosh \delta_{k-1})}{\sinh \delta_{k-1}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

節線 k で左右スパンのモーメントが釣合うべき条件より $M_{Bn}^{(k-1)} = M_{An}^{(k)} = M_n^{(k)}$ とおき、同じく節線 k におけるたわみ角の連続条件式 $\theta_{Bn}^{(k-1)} = \theta_{An}^{(k)}$ に式 (13) を代入すれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\sinh \delta_{k-1} - \delta_{k-1} \cosh \delta_{k-1}}{\sinh^2 \delta_{k-1}} \right) M_n^{(k-1)} + \left(\frac{\delta_{k-1} - \sinh \delta_{k-1} \cosh \delta_{k-1}}{\sinh^2 \delta_{k-1}} + \frac{\delta_k - \sinh \delta_k \cosh \delta_k}{\sinh^2 \delta_k} \right) M_n^{(k)} + \left(\frac{\sinh \delta_k - \delta_k \cosh \delta_k}{\sinh^2 \delta_k} \right) M_n^{(k+1)} \\ &= \frac{16D(1+\nu)\alpha T_2}{h\pi} \frac{1}{n} \left(\frac{\cosh \delta_k - 1}{\sinh \delta_k} + \frac{\cosh \delta_{k+1} - 1}{\sinh \delta_{k+1}} \right) \quad \text{ただし } k=1, 2, 3, \dots, i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

端節線 1 および $i+1$ が単純支持であれば $M_n^1 = M_n^{i+1} = 0$ となるゆえ、 $i-1$ 個の未知数 $M_n^2, M_n^3, \dots, M_n^i$ が式 (14) の連立方程式を解いて求められる。また両端節線が固定されれば、式 (13) より次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_n' = 0 \quad \text{すなわち} \quad &\frac{(\delta_1 - \sinh \delta_1 \cosh \delta_1) M_n^1 + (\sinh \delta_1 - \delta_1 \cosh \delta_1) M_n^2}{\sinh^2 \delta_1} = \frac{16D(1+\nu)\alpha T_2}{h\pi} \frac{1}{n} \frac{\cosh \delta_1 - 1}{\sinh^2 \delta_1} \\ \theta_n^{(i+1)} = 0 \quad \text{すなわち} \quad &\frac{(\sinh \delta_i - \delta_i \cosh \delta_i) M_n^i + (\delta_i - \sinh \delta_i \cosh \delta_i) M_n^{(i+1)}}{\sinh^2 \delta_i} = \frac{16D(1+\nu)\alpha T_2}{h\pi} \frac{1}{n} \frac{\cosh \delta_i - 1}{\sinh^2 \delta_i} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

したがって $i+1$ 個の未知数 $M_n^1, M_n^2, \dots, M_n^{(i+1)}$ が式 (14), (15) の連立方程式を解いて求められる。

以降の演算は単一板のそれと全く同様であり、式 (7), (8) より積分定数を算定のうえ、式 (4), (5) に適用すれば、任意点のたわみが、さらに式 (3) から曲げおよび捻りモーメントがえられ所要の連続板の温度応力をすべて求めることとなる。

5. 計算例

(i) 2 スパン連続板

図-4 のごとく $a_1 = a_2 = b = a$ で $\nu = 0.3$ の 2 スパン連続板の曲げ変形および曲げモーメントを求めてみる。節線 1 および 3 は単純支持されるものとすれば $M_n^1 = M_n^3 = 0$ また式 (14) より

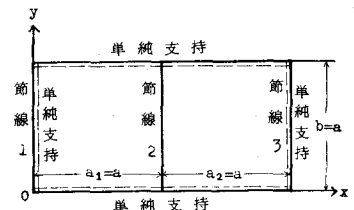


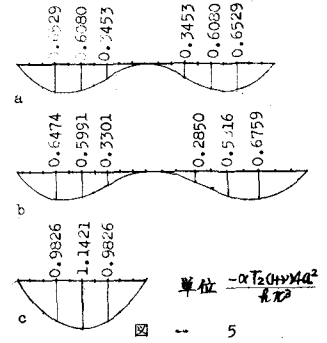
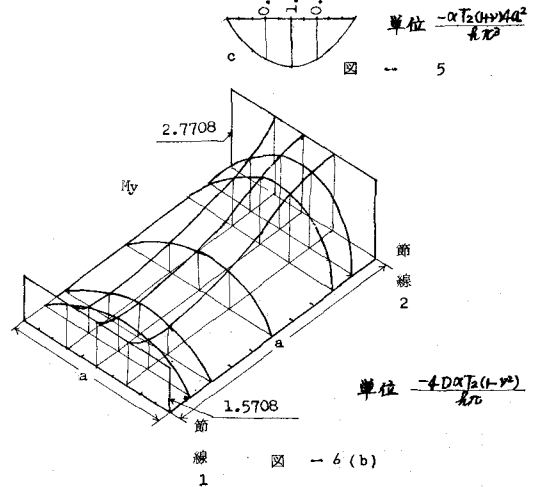
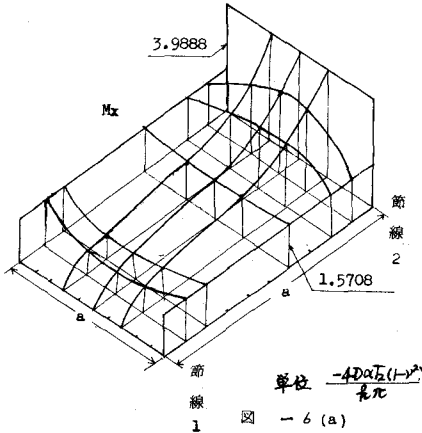
図 - 4

$$M_n^2 = \frac{16D(1+\nu)\alpha T_2}{h\pi} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\cosh \delta_1 - 1}{\sinh \delta_1} + \frac{\cosh \delta_2 - 1}{\sinh \delta_2} \right\} \left/ \left(\frac{\delta_1 - \sinh \delta_1 \cosh \delta_1}{\sinh^2 \delta_1} + \frac{\delta_2 - \sinh \delta_2 \cosh \delta_2}{\sinh^2 \delta_2} \right) \right.$$

これらの値を用いてたわみを算定し、板の中央線 $y = \frac{b}{2}$ にそって生ずる最大たわみをプロットすれば図-5(a)の結果をうる。また図-5(b)は $a_2 = 1.25a$ の 2 スパン連続板、図-5(c)は一边 a の正方形板の同じく $y = \frac{b}{2}$ にそうたわみ図である。次に図-4 の等スパン連続板の曲げモーメント M_x, M_y を

算定は1スパンのみにつきそれぞれ図-6(a), 6(b)の分布図を示した。同図より明らかなごとく

- (i) M_x, M_y ともに節線2で最大となるが、端辺 $y=0$ および $y=b$ では M_x が、また $x=0$ では M_y がかなり大きな値をとること
- (ii) 曲げモーメントの符号は板の全領域にわたって変わらないことの2点が注目される。



(ii) 3スパン連続板

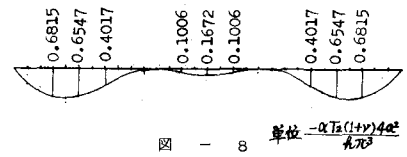
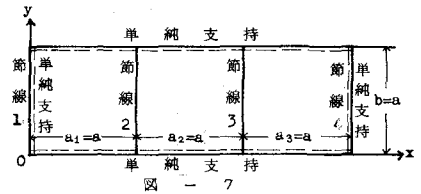
図-7の3スパン連続板で節線1および4が単純支持されるものとすれば対称性を考慮して $M_n^1 = M_n^4 = 0$ $M_n^2 = M_n^3$ が成立する。よって式(14)より

$$M_n^2 = M_n^3 = \frac{16D(1+\nu)\alpha T_2}{\pi} \left\{ \frac{\cos \alpha g_1 - 1}{\sinh^2 g_1} + \frac{\cos \alpha g_2 - 1}{\sinh^2 g_2} - \frac{(g_1 - \sinh g_1 \cosh g_1)}{\sinh^3 g_1} - \frac{(g_2 + \sinh g_2 \cosh g_2 - 1)}{\sinh^3 g_2} \right\}$$

図-8は以上の諸値を用いて算定した中央線 $y = \frac{b}{2}$ に沿ったたわみをプロットしたものであり、また曲げモーメント M_x, M_y は節線2で次の最大値となる。

$$(M_x)_{\max} = -3.6490 \times \frac{4\alpha T_2(1-\nu^2)D}{\pi}$$

$$(M_y)_{\max} = -2.6655 \times \frac{4\alpha T_2(1-\nu^2)D}{\pi}$$



6. 結語

本研究の結果、連続板の上下面に一定温度差がある場合に生ずる曲げ応力はスパン中央部では小さく、中間節線で極めて大きな値をとることが明らかとなった。したがって連続板の設計に温度応力を考慮する場合は中間節線における曲げモーメントを知れば十分であり、その値は本論の式(14)を解いて直ちに求められるゆえ、本研究の実用面での効用は極めて大なるものと確信する。

- 参考文献
- 1) S. Timoshenko & J. N. Goodier "Theory of Elasticity" McGraw-Hill, 1951.
 - 2) W. Nowacki "Thermoelasticity" Pergamon Press, 1962.
 - 3) A. Nádai "Die elastischen Platten" Berlin, Jul. Springer, 1925.