

九州大学 正 員 山崎徳也
長崎大学 , 樽木武
九州大学 学生員 金子忠男

1 緒 言

板は土木・建築構造物の主要構成要素であり、その形状も矩形板、平行四辺形板、台形板、三角形板、円板、扇形板など多岐にわたっている。これらの板の振動解析に関する研究は古くから多くの人々によってなされており、矩形板では井口⁽¹⁾⁽²⁾、成岡⁽³⁾、Reed, R. E.⁽⁴⁾、著者等⁽⁵⁾、平行四辺形板では、R. Kaul & V. Cadambe⁽⁶⁾、著者等⁽⁷⁾、円板では R. V. Southwell⁽⁸⁾、H. Carrington⁽⁹⁾、R. Y. Bodine⁽¹⁰⁾ などの数多くの研究がある。しかし、扇形板の振動解析に関する研究は、著者等の知る限りにおいては、R. A. Westmann⁽¹¹⁾の研究があるに過ぎない。

Westmannの研究は▽型の扇形板を対象とし、その自由振動解析を行っているが、道路橋や鉄道橋の曲線部では、□型扇形板が多用されており▽型扇形板はほとんど見受けられない。□型扇形板は、橋台や橋脚などで単純支持されるものが多く、したがって本論文は直線辺が単純支持され、円弧辺が任意の支持条件を有する扇形板の自由振動問題の解法を提示し、かかる扇形板の振動特性を明らかにせんとするものである。なお、本題の扇形板は板全面にわたって等定性等断面であるものとし、また、薄板理論が適用できるものとする。

2 解 法

(1) 基礎微分方程式 図-1に示すごとく、点Oを中心とし、半径がそれぞれ r_1, r_2 なる同心円と中心Oを通り互いに角度 α の開きをもつ二直線で囲まれた扇形板ABDCを考える。いま、扇形板ABDCの中立面上に中心Oを原点とする円筒座標 (r, θ, z) を導入し、扇形板のz軸方向のたわみを w とすれば、扇形板の自由振動の微分方程式は次のごとくあらわされる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 h : 板の厚さ、 t : 時間、 $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$: 板剛度、 E : 板の弾性係数、 ν : ポアソン比。

扇形板の代表的長さとして、外周までの半径 r_2 をとり、式(1)を無次元表示すれば次のごとくなる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial \kappa} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial \kappa} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) w + \frac{\rho h}{D} r_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad \kappa = r/r_2 \quad (2)$$

扇形板ABDCは直線辺AC, BDで単純支持されているゆえ、これらの境界条件を満足する式(2)の一般解は次式のごとく仮定する。

$$w = W_{an}(\kappa) \sin a_n \theta \cos p t \quad (3) \quad a_n = n\pi/\alpha, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad p: \text{扇形板の固有円振動数}$$

式(3)を式(2)に代入のうえ、変形すれば $W_{an}(\kappa)$ を求めるための微分方程式が次式のごとくえられる。

$$\left(\frac{d^2}{d\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{d}{d\kappa} - \frac{a_n^2}{\kappa^2} + b^2\right) \left(\frac{d^2}{d\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{d}{d\kappa} - \frac{a_n^2}{\kappa^2} - b^2\right) W_{an}(\kappa) = 0 \quad (4) \quad \text{ここに、} \quad b^2 = p^2 r_2^2 / D \quad (5)$$

式(4)は次のごとくBesselの微分方程式および変形されたBesselの微分方程式に分解される。

$$\frac{d^2 W_{a1}}{d\kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{d W_{a1}}{d\kappa} + \left\{1 - \frac{a_n^2}{\kappa^2}\right\} W_{a1} = 0 \quad (6) \quad \frac{d^2 W_{a2}}{d\kappa^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{d W_{a2}}{d\kappa} - \left\{1 + \frac{a_n^2}{\kappa^2}\right\} W_{a2} = 0 \quad (7)$$

式(6)および式(7)の一般解は次のごとくBessel関数で与えられる。

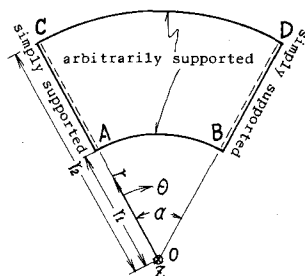


図-1

$$W_{\alpha 1} = A_{\alpha} J_{\alpha}(kx) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(kx), \quad W_{\alpha 2} = C_{\alpha} I_{\alpha}(kx) + D_{\alpha} K_{\alpha}(kx) \quad (8)$$

ここに, $A_{\alpha}, B_{\alpha}, C_{\alpha}, D_{\alpha}$: 任意定数, $J_{\alpha}(kx)$: α 次の第 1 種 Bessel 関数, $Y_{\alpha}(kx)$: α 次の第 2 種 Bessel 関数
 $I_{\alpha}(kx)$: 変形された α 次の第 1 種 Bessel 関数, $K_{\alpha}(kx)$: 変形された α 次の第 2 種 Bessel 関数
 (1) $\alpha = 0$ のとき, 式 (2) の一般解は次のとおりである。

$$W = \{A_{\alpha} J_{\alpha}(kx) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(kx) + C_{\alpha} I_{\alpha}(kx) + D_{\alpha} K_{\alpha}(kx)\} \sin \alpha \theta \cos \rho x \quad (9)$$

式 (9) に含まれる $A_{\alpha} \sim D_{\alpha}$ の 4 つの任意定数は扇形板の円弧辺 AB , CD の境界条件により決定されるが, 円弧辺の境界条件のうち, 2 円弧辺がともに単純支持される場合, 2 円弧辺がともに固定される場合, および, 2 円弧辺がともに自由である場合の 3 種の状態が最も重要と考えられ, 他の種々の状態はこれらを適宜組合せることにより容易に解析されうるので, 以下上記の 3 例について論ずることにする。

(i) 円弧辺が単純支持される扇形板

2 つの円弧辺 AB , CD がともに単純支持される場合の境界条件は次のとおりである。

$$x = x_0 (= r_0/r_1), \quad 1 \leq r. \quad (W)_{x=x_0, 1} = 0, \quad (M_x)_{x=x_0, 1} = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\}_{x=x_0, 1} = 0 \quad (10)$$

式 (9) を式 (10) に代入し, 演算のうえ整理すれば, 次のとき連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha} J_{\alpha}(kx_0) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(kx_0) + C_{\alpha} I_{\alpha}(kx_0) + D_{\alpha} K_{\alpha}(kx_0) &= 0 \\ A_{\alpha} J_{\alpha}(kx_0) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(kx_0) + C_{\alpha} I_{\alpha}(kx_0) + D_{\alpha} K_{\alpha}(kx_0) &= 0 \\ A_{\alpha} J_{\alpha}(k) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(k) + C_{\alpha} I_{\alpha}(k) + D_{\alpha} K_{\alpha}(k) &= 0 \\ A_{\alpha} J_{\alpha}(k) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(k) + C_{\alpha} I_{\alpha}(k) + D_{\alpha} K_{\alpha}(k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ここに, } J_{\alpha}(kx) &= \left\{ \frac{(1-\nu)\alpha_n(\alpha_n-1)}{k^2 x^2} - 1 \right\} J_{\alpha}(kx) + \frac{(1-\nu)}{kx} J_{\alpha+1}(kx), \\ Y_{\alpha}(kx) &= \left\{ \frac{(1-\nu)\alpha_n(\alpha_n-1)}{k^2 x^2} - 1 \right\} Y_{\alpha}(kx) + \frac{(1-\nu)}{kx} Y_{\alpha+1}(kx), \\ I_{\alpha}(kx) &= \left\{ \frac{(1-\nu)\alpha_n(\alpha_n-1)}{k^2 x^2} + 1 \right\} I_{\alpha}(kx) - \frac{(1-\nu)}{kx} I_{\alpha+1}(kx), \\ K_{\alpha}(kx) &= \left\{ \frac{(1-\nu)\alpha_n(\alpha_n-1)}{k^2 x^2} + 1 \right\} K_{\alpha}(kx) + \frac{(1-\nu)}{kx} K_{\alpha+1}(kx). \end{aligned}$$

式 (11) における任意定数 $A_{\alpha}, B_{\alpha}, C_{\alpha}, D_{\alpha}$ の解をもつためにはその係数の行列式の値が 0 でなければならぬことより, 本題の振動数方程式が次のとおりえられる。

$$\begin{vmatrix} J_{\alpha}(kx_0) & Y_{\alpha}(kx_0) & I_{\alpha}(kx_0) & K_{\alpha}(kx_0) \\ J_{\alpha}(kx_0) & Y_{\alpha}(kx_0) & I_{\alpha}(kx_0) & K_{\alpha}(kx_0) \\ J_{\alpha}(k) & Y_{\alpha}(k) & I_{\alpha}(k) & K_{\alpha}(k) \\ J_{\alpha}(k) & Y_{\alpha}(k) & I_{\alpha}(k) & K_{\alpha}(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

(iii) 円弧辺が固定される扇形板

2 つの円弧辺 AB , CD がともに固定される場合の境界条件は次式で与えられる。

$$x = x_0, \quad 1 \leq r, \quad (W)_{x=x_0, 1} = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=x_0, 1} = 0 \quad (13)$$

式 (9) を式 (13) に代入し, 演算のうえ整理すれば, 次のとき連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha} J_{\alpha}(kx_0) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(kx_0) + C_{\alpha} I_{\alpha}(kx_0) + D_{\alpha} K_{\alpha}(kx_0) &= 0 \\ A_{\alpha} J_{\alpha}(kx_0) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(kx_0) + C_{\alpha} I_{\alpha}(kx_0) + D_{\alpha} K_{\alpha}(kx_0) &= 0 \\ A_{\alpha} J_{\alpha}(k) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(k) + C_{\alpha} I_{\alpha}(k) + D_{\alpha} K_{\alpha}(k) &= 0 \\ A_{\alpha} J_{\alpha}(k) + B_{\alpha} Y_{\alpha}(k) + C_{\alpha} I_{\alpha}(k) + D_{\alpha} K_{\alpha}(k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } \mathbf{J}_n(kx) &= \frac{a_n}{kx} \mathbf{J}_{a_n}(kx) - \mathbf{J}_{n+1}(kx), & \mathbf{I}_n(kx) &= \frac{a_n}{kx} \mathbf{I}_{a_n}(kx) - \mathbf{I}_{n+1}(kx), \\ \mathbf{I}_{a_n}(kx) &= \frac{a_n}{kx} \mathbf{I}_{a_n}(kx) + \mathbf{I}_{n+1}(kx), & \mathbf{K}_{a_n}(kx) &= \frac{a_n}{kx} \mathbf{K}_{a_n}(kx) - \mathbf{K}_{n+1}(kx), \end{aligned}$$

(ii) の場合と同様, $A_{a_n}, B_{a_n}, C_{a_n}, D_{a_n}$ の係数 4 行 4 列式を次のごとく振動数方程式でえらる。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{Y}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{I}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{K}_{a_n}(kx_0) \\ \mathbf{J}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{Y}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{I}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{K}_{a_n}(kx_0) \\ \mathbf{J}_{a_n}(k) & \mathbf{Y}_{a_n}(k) & \mathbf{I}_{a_n}(k) & \mathbf{K}_{a_n}(k) \\ \mathbf{J}_{a_n}(k) & \mathbf{Y}_{a_n}(k) & \mathbf{I}_{a_n}(k) & \mathbf{K}_{a_n}(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

(iv) 円弧辺が自由である扇形板

2 つの円弧辺 AB, CD がともに自由である場合の境界条件は次のとおりである。

$$\begin{aligned} x=x_0, 1 \quad (Mx)_{x=x_0, 1} &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\}_{x=x_0, 1} = 0, \\ (Vx)_{x=x_0, 1} &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \left(\frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\}_{x=x_0, 1} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

式(9)を式(46)に代入すれば, 次の諸式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_{a_n} \mathbf{J}_{a_n}(kx_0) + B_{a_n} \mathbf{Y}_{a_n}(kx_0) + C_{a_n} \mathbf{I}_{a_n}(kx_0) + D_{a_n} \mathbf{K}_{a_n}(kx_0), \\ A_{a_n} \mathbf{J}_{a_n}(kx_0) + B_{a_n} \mathbf{Y}_{a_n}(kx_0) + C_{a_n} \mathbf{I}_{a_n}(kx_0) + D_{a_n} \mathbf{K}_{a_n}(kx_0), \\ A_{a_n} \mathbf{J}_{a_n}(k) + B_{a_n} \mathbf{Y}_{a_n}(k) + C_{a_n} \mathbf{I}_{a_n}(k) + D_{a_n} \mathbf{K}_{a_n}(k), \\ A_{a_n} \mathbf{J}_{a_n}(k) + B_{a_n} \mathbf{Y}_{a_n}(k) + C_{a_n} \mathbf{I}_{a_n}(k) + D_{a_n} \mathbf{K}_{a_n}(k). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } \mathbf{J}_{a_n}(kx) &= \frac{1}{kx} \left\{ \frac{(1-\nu)a_n(a_n-1)(a_n-2)}{k^2 x^2} + (a_n+1-\nu) \right\} \mathbf{J}_{a_n}(kx) - \left\{ \frac{(1-\nu)(a_n^2+2)}{k^2 x^2} + 1 \right\} \mathbf{J}_{a_n+1}(kx), \\ \mathbf{Y}_{a_n}(kx) &= \frac{1}{kx} \left\{ \frac{(1-\nu)a_n(a_n-1)(a_n-2)}{k^2 x^2} + (a_n+1-\nu) \right\} \mathbf{Y}_{a_n}(kx) - \left\{ \frac{(1-\nu)(a_n^2+2)}{k^2 x^2} + 1 \right\} \mathbf{Y}_{a_n+1}(kx), \\ \mathbf{I}_{a_n}(kx) &= \frac{1}{kx} \left\{ \frac{(1-\nu)a_n(a_n-1)(a_n-2)}{k^2 x^2} - (a_n+1-\nu) \right\} \mathbf{I}_{a_n}(kx) + \left\{ \frac{(1-\nu)(a_n^2+2)}{k^2 x^2} - 1 \right\} \mathbf{I}_{a_n+1}(kx), \\ \mathbf{K}_{a_n}(kx) &= \frac{1}{kx} \left\{ \frac{(1-\nu)a_n(a_n-1)(a_n-2)}{k^2 x^2} - (a_n+1-\nu) \right\} \mathbf{K}_{a_n}(kx) - \left\{ \frac{(1-\nu)(a_n^2+2)}{k^2 x^2} - 1 \right\} \mathbf{K}_{a_n+1}(kx). \end{aligned}$$

式(47)より, 本題の振動数方程式が次のごとくえられる。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{J}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{Y}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{I}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{K}_{a_n}(kx_0) \\ \mathbf{J}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{Y}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{I}_{a_n}(kx_0) & \mathbf{K}_{a_n}(kx_0) \\ \mathbf{J}_{a_n}(k) & \mathbf{Y}_{a_n}(k) & \mathbf{I}_{a_n}(k) & \mathbf{K}_{a_n}(k) \\ \mathbf{J}_{a_n}(k) & \mathbf{Y}_{a_n}(k) & \mathbf{I}_{a_n}(k) & \mathbf{K}_{a_n}(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

扇形板の固有円振動数は, 式(42), (45), (48) を満足する固有値 k を式(5)に代入することにより決定されるが, 矩形板のそれと同一型にするため, 扇形板の辺長比 λ を次式のごとく定義し導入する。

$$\lambda = (Y_2 - Y_1) / l = \frac{2\varepsilon(1-x_0)}{\pi(1+x_0)} \quad (49) \quad \text{ここに, } \varepsilon = \pi/a, \quad l: \text{扇形板の中央円弧長}$$

式(49)および式(5)から, 扇形板の固有円振動数は扇形板の形状パラメータ λ, ε, l の関数として, 次のごとくあらわされる。

$$p = \frac{4k^2}{(2\varepsilon + \lambda\pi)^2} \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{D/(P\lambda)} = \mu \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{D/(P\lambda)}, \quad \text{cf. 矩形板: } p_0 = \mu_0 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{D/(P\lambda)}, \quad a: \text{矩形板の一辺}$$

3. 計算例. 開角 $\alpha = \pi/3$, 辺長比 $\lambda = 1.0$, $\nu = 0.3$ なる扇形板の自由振動の固有円振動数を (iv) (v)

(iv) の三つの境界条件をもつ場合についてそれぞれ求める。その各値について, 式(42)(45)(48) を満足する値は無限に存在するが, 特に $n=1, 2$ の場合について式(42)からえられる k および μ を表-1に, 式(45)からえられるものを表-2に, 式(48)からえられるものを表-3に示す。すなわち, 表-1~3の第3欄に同一辺長比をもつ矩形板(この場合正方形板)の μ 値と本扇形板の μ 値と比較のため付記した。次に, (iv) 辺

図 - 2

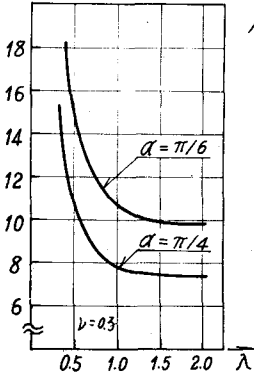
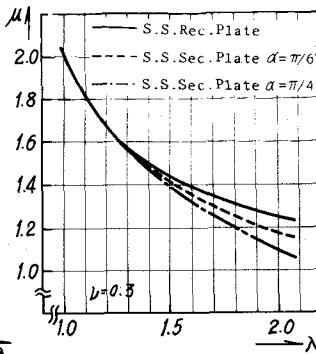


図 - 3



がすべて単純支持される扇形板において、 α, ν を一定に11時の辺長比入に對する最小固有値の変化をみるため、 $\alpha = \pi/6, \pi/4$ の2例について μ 値を算出のうえプロットすれば図-2のごとくなる。図-3は図-2の μ より算定される μ 値をプロットしたものであるが、 λ が1.3以下の場合には矩形板(国中実線)とほとんど差異が無く、 λ が1.3より大きくなると扇形板の扇形特性があらわれることがわかる。さらに、図-4は、 $\alpha = \pi/6, \lambda = 1.0, \nu = 0.3$ の四辺単純支持扇形板の $\mu = 0.0500$ (2次)に對する振動モードを図示したものである。

4. 結 語

式(12)(13)(14)に含まれる4種のBessel関数は μ の値が20以下であれば、非常に収束が早く10~30項程度で充分な精度がえられる。本論文では扇形板の自由振動問題を扱ったが、板に動的荷重が作用する場合のいわゆる強制振動問題も解析可能である。

表 - 1

	Circular Ring Sector Plate		Square Plate
	k	μ	μ_0
n=1	6.4704	2.0034	2
	10.5188	5.2960	5
	14.7420	10.4023	10
n=2	9.8704	4.6632	5
	13.6159	8.8738	8
	17.3193	14.3573	13

表 - 2

	Circular Ring Sector Plate		Square Plate
	k	μ	μ_0
n=1	7.8300	2.9345	2.933
	12.2033	7.1281	7.024
	16.6275	13.2334	10.357
n=2	10.7279	5.5087	5.547
	14.6362	10.2535	9.584
	18.6085	16.5745	14.205

表 - 3

	Circular Ring Sector Plate		Square Plate
	k	μ	μ_0
n=1	3.6757	0.6467	0.9759
	7.1524	2.4486	1.6347
	10.3676	5.1449	3.7212
n=2	7.1785	2.4665	3.9459
	11.1781	5.9807	4.7355
	14.5089	10.0760	7.1673

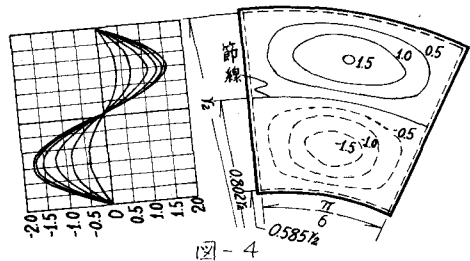


図 - 4

参考文献

- (1) S. Iguchi, "Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte" Ing. Arch. Berlin 1937
- (2) 井口："相对2辺が単純支持他2辺が自由な矩形板の振動に就て" 土木学会誌 26巻 4号 昭和15年4月
- (3) 成岡："四辺固定正方形板の固有振動数の計算に就て" 土木学会論文集 33巻 昭和24年3月
- (4) Reed, R. E., "Comparison of method in calculating frequency of corner-supported rectangular plates" NASA TND-3030 Sept. 1965
- (5) 山崎 隆木："周辺で単純支持される無梁板の自由振動" 14回橋梁構造工学研究発表会"薄板及び立体構造の振動研究" 昭和42年12月
- (6) R. Kaul & V. Cadambe, "The natural Frequencies of Thin Skew Plates" Aeronautical Quarterly 7. 1965
- (7) 山崎 隆木："任意境界条件をもつ等角形斜板の自由振動" 九州大学工学集報 24巻 1号 昭和43年1月
- (8) R. V. Southwell, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at its Centre and on the Effect of Rotation" Proceedings of the Royal Society of London vol. 101 1922
- (9) H. Carrington, "The Frequencies of Flat Circular Plates fixed at the Circumference" Philosophical Magazine vol. 50 1925
- (10) Walter P. Reid, "Free Vibration of a Circular Plate" Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics vol. 10 1962
- (11) R. A. Westmann, "A Note on Free Vibrations of Triangular and Sector Plates" Journal of the Aerospace Sciences 1962