

九州大学 正員 山崎徳也

〃 〃 太田俊昭

〃 学生員 〇片山 忠

1. 序言

曲げと捻りの組み合わせ荷を受けるばりの弾塑性挙動については、塑性域での曲げ応力や捻りせん断応力の分布状態あるいは弾、塑性域の境界など一義的に求めることの出来ない多くの非線形要素があるため、その理論的解析は非常に難しく、今日のところかかる問題に関する研究は、著者らの歪増分理論に基づく解法を除けば皆無である。

本論文は、新たに全歪理論に基づく上記組合せ荷も受ける薄肉円管断面ばりの補正エネルギーを算定し、これを用いて薄肉円管断面を有する円弧曲りばりの弾塑性解析を行ない、さらに両理論の比較検討を試みたものである。

2. 基本式

図-1のごとく、 x 軸回りの曲げモーメント M および z 軸回りの捻りモーメント T が作用する薄肉円管断面において、弾性応力状態[図-1(c),(e)]および弾塑性応力状態[図-1(d),(e)]の曲げモーメントおよび捻りモーメントはそれぞれ次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= 2(1+\nu)\pi\bar{\psi} \\ \bar{T} &= 2\pi\bar{\omega} \end{aligned} \right\} \quad \text{弾性状態} \quad \text{----- (1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= 2(1+\nu)(\pi + \sin 2\alpha - 2\alpha)\bar{\psi} \\ \bar{T} &= 2\pi\bar{\omega}/\epsilon \end{aligned} \right\} \quad \text{弾塑性状態} \quad \text{----- (2)}$$

ここに、 $\bar{M}=M/ka^3t$, $\bar{T}=T/ka^3t$; 無次元化した曲げモーメントおよび捻りモーメント。

$\bar{\psi}=Ga\psi/ka$, $\bar{\omega}=Ga\omega/ka$; 無次元化した曲率および捻り角。 ψ, ω ; 曲率および捻り角。

G ; せん断弾性係数。 τ ; せん断応力。 $\epsilon=\sigma_y/\sqrt{3}$, σ_y ; 降伏応力。 ν ; ポアソン比。

a ; 中心半径。 t ; 厚さ。 α ; 図-1(b)に示す塑性域を表わすパラメータ。

次に降伏条件として MISES の条件を採用すれば、断面の塑性域において

$$\frac{1}{3}\sigma_z^2 + \tau^2 = \epsilon^2 \quad \text{ただし } \sigma_z: \text{塑性域における垂直応力。} \quad \text{----- (3)}$$

が成り立ち、これに式(1),(2)を適用すれば α を決定する次式がえられる。

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\mu\bar{\psi}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{4\pi^2 R^2} \bar{M}^2 \right\} \quad \text{ここに } \mu = 4(1+\nu)^2/3, R = M/T = \bar{M}/\bar{T}. \quad \text{----- (4)}$$

いま、弾性限界ならびに完全塑性状態での曲げおよび捻りモーメントをそれぞれ M_0, M_∞ および T_0, T_∞ とすれば、式(1),(2),(3)および式(4)より次の関係式がえられる。

$$\frac{4}{3}\bar{M}_0^2 + \bar{T}_0^2 = 4\pi^2 = \frac{\pi^2}{12} \bar{M}_\infty^2 + \bar{T}_\infty^2 \quad \text{ただし } \bar{M}_0/M_0 = \bar{M}_\infty/M_\infty = \bar{T}_0/T_0 = \bar{T}_\infty/T_\infty = 1/\epsilon a^3 t \quad \text{----- (5)}$$

一方、歪増分理論の代表的な応力-歪方程式である REUSS の方程式を変形すれば次式がえられる。

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{\psi}} = \left\{ \left[1 - \left[1 - \frac{3\alpha}{(1+\nu)\pi} \right] \left(\frac{\bar{M}}{2\pi R} \right)^2 \right] \frac{1}{2\pi R} \frac{d\bar{M}}{d\bar{\psi}} + \left[1 - \left(\frac{\bar{M}}{2\pi R} \right)^2 \right] \frac{3}{(1+\nu)\pi} \frac{\tan\alpha}{\bar{\psi}} \left(\frac{\bar{M}}{2\pi R} \right) \right\} / \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{M}}{2\pi R} \right)^2 \right\} \quad (6)$$

$$\text{ただし } \frac{d\bar{M}}{d\bar{\psi}} = \frac{\bar{M}}{\bar{\psi}} - \frac{8(1+\nu)\tan\alpha}{\bar{\psi} \left\{ \mu\bar{\psi} + \frac{2(1+\nu)\tan\alpha}{\pi^2 R^2} \bar{M} \right\}}$$

以上の諸式を用いれば弾塑性状態での任意の曲げと捻りの組み合わせ負荷に対する所要の $\bar{w}$, $\bar{\psi}$ が以下の順序で算定される。すなわち

(i). 式(2),(4)を用いて必要の精度に収束するまで逐次、繰り返し計算を行ない、 α , $\bar{\psi}$ を算出する。

(ii). (i)で求めた α , $\bar{\psi}$ を用いて式(6)より $d\bar{w}/d\bar{\psi}$ を算定し、これを $\bar{M}=\bar{T}=0$ より与えられた $\bar{M}, \bar{T}$ まで数値積分して $\bar{w}$ を決定する。

このようにして種々の $R=(\bar{M}/\bar{T})$ の値に対する $\bar{M}-\bar{\psi}$ ならびに $\bar{w}-\bar{\psi}$ の関係を求め、それらの結果をそれぞれ図-2, 図-3に示したが、上記の $\bar{w}$ 算定法が煩雑で実用的でないため、ここでは先に著者らが提案した式(7)の近似式³⁾を用いるものとする。

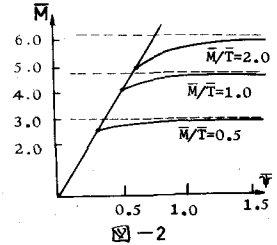


図-2

$$(\text{弾性状態}) \quad \bar{w} = \frac{1+\nu}{R} \bar{\psi}$$

$$(\text{弾塑性状態}) \quad \bar{w} = \frac{3}{4} \frac{1+\nu}{R} \bar{\psi} + \frac{\sin \bar{M}}{4R} \sqrt{\frac{3R^2}{3+4R^2}} \quad (7)$$

$$\text{ただし } \sin \bar{M} = \begin{cases} +1 & (\bar{M} \geq 0) \\ -1 & (\bar{M} < 0) \end{cases}$$

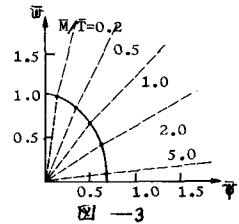


図-3

次に全歪理論の代表的な応力-歪方程式であるHENCKYの方程式に基づく $\bar{w}$ の算定式を誘導する。まず垂直応力 σ とせん断応力 τ を受ける微小断面の塑性変形をHENCKYの方程式を用いて表わせば

$$\frac{3\tau}{\sigma} = \frac{\gamma - \tau/G}{\epsilon - \sigma/E} \quad (8)$$

ただし ϵ, γ ; 垂直ひずみおよびせん断ひずみ、 E ; ヤング率、

式(8)に $\sigma = E\psi/C$ (ただし C ; 塑性域の深さ)、 $\epsilon = \psi|y|$ (ただし $|y|$; 中立軸からの距離)を代入すれば次式となる。

$$\sigma = \frac{3\tau}{E} (|y|/C - 1) + \tau/G$$

上式の右辺第1項が塑性歪、第2項が弾性歪を表わしていることに注意して同式を周辺方向に積分すれば次式が導かれる。

$$\tau = 2GA\omega / \left\{ \frac{3}{2(1+\nu)} \int_P \left\{ \frac{|y|}{C} - 1 \right\} ds + p \right\}$$

ただし A, P ; 断面面積および周長、積分の添字 P ; 断面の塑性域、

上式を円管断面に適用すれば、弾性ならびに弾塑性状態における捻り角の算定式が最終的に次のとおり求められる。

$$\left. \begin{aligned} (\text{弾性状態}) \quad \bar{w} &= \frac{\bar{T}}{2\pi} \\ (\text{弾塑性状態}) \quad \bar{w} &= \frac{\bar{T}}{2\pi} \left\{ \frac{3}{1+\nu} (\tan\alpha - \alpha) + \pi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

したがって前記(i)の逐次計算よりパラメータ α が決まれば、式(9)より、与えられた捻りモーメント $\bar{T}$ に対する捻り角 $\bar{w}$ が算定される。

以上の厳密REUSS方程式、近似REUSS方程式ならびにHENCKY方程式を用いて、種々の $R=(\bar{M}/\bar{T})$ および $\bar{\psi}$ の値に対する捻り角を算定すれば表-1のごとくなる。

R(=M/T)=5.0						R(M/T)=2.0					
曲率 $\bar{\psi}$	0.656 (降伏値)	0.744	0.854	1.26	2.17	0.611 (降伏値)	0.681	0.773	0.952	1.39	
厳密REUSS式による $\bar{\omega}$	0.171	0.190	0.212	0.296	0.504	0.397	0.436	0.482	0.573	0.812	
近似REUSS式 "	0.171	0.188	0.209	0.288	0.465	0.397	0.432	0.476	0.564	0.778	
HENCKY式 "	0.171	0.190	0.213	0.301	0.518	0.397	0.436	0.483	0.578	0.829	
R(=M/T)=1.0						R(M/T)=0.5					
曲率 $\bar{\psi}$	0.504 (降伏値)	0.545	0.647	0.803	1.19	0.333 (降伏値)	0.344	0.378	0.4344	0.573	
厳密REUSS式による $\bar{\omega}$	0.655	0.699	0.797	0.959	1.39	0.866	0.884	0.950	1.06	1.35	
近似REUSS式 "	0.655	0.695	0.794	0.947	1.33	0.866	0.883	0.954	1.07	1.33	
HENCKY式 "	0.655	0.699	0.802	0.973	1.44	0.866	0.884	0.953	1.07	1.38	

表-1

表-1の結果より明らかにされた諸点を要約すると以下のとおりである。

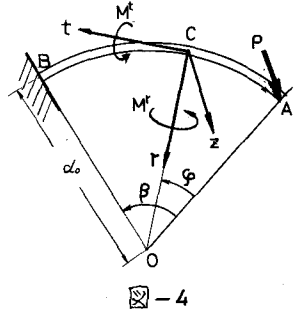
(1). 一般にHENCKYの方程式で求めた $\bar{\omega}$ は近似REUSS方程式の $\bar{\omega}$ に比べて最大限10%程度大きな値をとる。

(2). $\bar{\omega}$ の厳密な値は一般的にHENCKYの方程式ならびに近似REUSS方程式で算出される $\bar{\omega}$ の各値の中間に存在するか、大体においてHENCKYの方程式で算定される $\bar{\omega}$ が精度上優っている。

3. 計算例

REUSSならびにHENCKYの方程式より誘導した式(7)および式(9)を用いて図-4に示す円弧曲り管の弾塑性解析を行ない、両理論の比較を試みる。まず、流動座標(r, t, z)を図のごとく設置すれば、荷重点Aより角度 φ にある任意点Cの r 軸および t 軸回りのモーメント M^r および M^t はそれぞれ次式で与えられる。ただし、集中荷重Pは軸面外荷重とする。

$$\left. \begin{aligned} M^r &= \bar{P} \sin \varphi \\ M^t &= \bar{P} (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



ここに $M^r/M^t = M^r/M^t = 1/\tan \varphi$, $\bar{P}/P = d_0/R \sin \varphi$, d_0 : 円管重心軸の曲率半径。

かかる曲げおよび捩りモーメントを受ける部材の単位長さ当りに貯えられる補正エネルギーは

$$dU/ds = \int \psi dM + \int \omega dT = R \sin \varphi / G \cdot \left\{ \int \psi dM + \int \omega dT \right\}$$

ここで図-4に示すごとく $\bar{\psi}, \bar{\omega}$ をAB部およびBC部に分け、これらをそれぞれ $\bar{\psi}_E, \bar{\psi}_P$ および $\bar{\omega}_E, \bar{\omega}_P$ で表わし $M = M^r, T = M^t$ とおけば、上記補正エネルギーを下記のごとき $\partial U_E / \partial S$ と $\partial U_P / \partial S$ に分けて表わすことができる。

$$dU/ds = dU_E/ds + dU_P/ds = R \sin \varphi / G \left\{ \int_{AB} (\bar{\psi}_E dM^r + \bar{\omega}_E dM^t) + \int_{BC} (\bar{\psi}_P dM^r + \bar{\omega}_P dM^t) \right\} \quad (11)$$

ただし、積分記号の添字E, Pは材軸方向の弾性領域ならびに弾塑性領域を表わす。

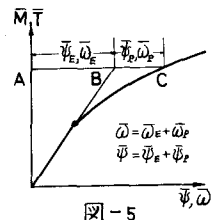
次に、式(11)の補正エネルギー式に変分原理を適用して荷重点Aの z 軸方向のたわみを求めれば次式をうる。

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{d_0}{R \sin \varphi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} = \frac{d_0}{R \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial U_E}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U_P}{\partial \bar{P}} \right\} \quad (12)$$

式(12)の $\partial U_E / \partial \bar{P}$ は、 $\partial \bar{\psi}_E / \partial M^r = \partial \bar{\omega}_E / \partial M^t = 0$ なる条件および式(1), (7), (10)を用いて次のごとく変形される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_E}{\partial \bar{P}} &= \frac{\partial U_E}{\partial M^r} \cdot \frac{\partial M^r}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U_E}{\partial M^t} \cdot \frac{\partial M^t}{\partial \bar{P}} = \frac{R \sin \varphi}{G} \left\{ \int \bar{\psi}_E \frac{\partial M^r}{\partial \bar{P}} ds + \int \bar{\omega}_E \frac{\partial M^t}{\partial \bar{P}} ds \right\} \\ &= \frac{d_0}{2\pi} \cdot \bar{P} \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right) + \left(\frac{3}{2}\beta - 2\sin \beta + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし β : 中心角。



一方、式(12)の $\partial U_P / \partial \bar{P}$ に関しては項別積分が不可能であるので、図-6のごとく部材を n 個に分割し、各分割部材のエネルギーをその中央点のエネルギーで置きかえれば、

$$\frac{dU_P}{d\bar{P}} = \frac{\Delta U_P}{\Delta \bar{P}} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta(\frac{\partial U_P}{\partial S})_i \cdot \Delta S_i}{\Delta \bar{P}} = \frac{d\sigma}{d\bar{P}} \sum_{i=1}^n \Delta(\frac{\partial U_P}{\partial S})_i \cdot \Delta \varphi_i \quad \text{----- (14)}$$

ただし、 $\Delta \bar{P}$ は荷重の微小変化、 $\Delta(\frac{\partial U_P}{\partial S})_i$ は断面 $\varphi = \varphi_i$ の荷重微小変化 $\Delta \bar{P}$ に対応する補正エネルギーの微小変化量、 $\Delta \varphi_i$ は i 番目の分割部材の中心角を表わす。なお、曲率、接り角ともに固定端に漸近するにつれて大きな値をとるため、精度を上げる分割法として次のごとき対数を利用した方法を採用する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \frac{\beta}{4 \ln(n-1)} \{ \ln\{(n-2)i+1\} + \ln\{(n-2)i-n+3\} \} \\ \Delta \varphi_i &= \frac{\beta}{2 \ln(n-1)} \{ \ln\{(n-2)i+1\} - \ln\{(n-2)i-n+3\} \} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (15)}$$

以上誘導した諸式を用いれば、与えられた荷重に対するA点のたわみを算定することができる。中心角 β が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の各場合について降伏荷重 $\bar{P}_0$ より崩壊荷重 $\bar{P}_\infty$ に至る各荷重に対するたわみを算定して、図-7(a)(b)および(c)に示した。

図-7の各図よりいずれの場合もHENCKYの方程式を用いた場合が近似REUSS方程式を用いた場合に比較して大きなたわみ量を示しており、崩壊時においては前者が5~10%程度大きく、安全側にあることが判読される。

なお、降伏荷重 $\bar{P}_0$ ならびに崩壊荷重 $\bar{P}_\infty$ は固定端Bのモーメント値を式(5)の条件式に代入すれば、それぞれ次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_0 &= 2\pi / \sqrt{\frac{4}{3} \sin^2 \beta + (1 - \cos \beta)^2} \\ \bar{P}_\infty &= 2\pi / \sqrt{\frac{\pi^2}{12} \sin^2 \beta + (1 - \cos \beta)^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (16)}$$

4. 結語

本論文では、全歪理論の応力-歪方程式であるHENCKYの方程式に基づいて湾肉円管断面の接り角算定式を求め、曲げと接りの組み合わせ負荷を受ける同種断面ばりの補正エネルギーを算出して円弧曲りばりの弾塑性解析を行ない、同時に歪増分理論による解との比較検討を試みた。その結果全歪理論による解が工学的に充分な精度を有することが判明し、この理論の解析上の簡明さも考え合わせれば、全歪理論に基づく本法がかかる問題に対して極めて有用であることが確認された。

なお、本研究は、文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表す。

参考文献 1) 山崎太田片山「曲げと接りモーメントを同時に受ける立体ラーメンの弾塑性解析」

昭和42年度土木学会西部支部研究発表会論文集、昭和43年2月。

2) 山崎太田片山「円弧曲りばりの弾塑性解析」第23回土木学会年次大会講演会講演概要、昭和43年10月

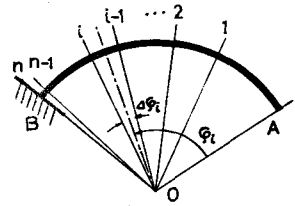
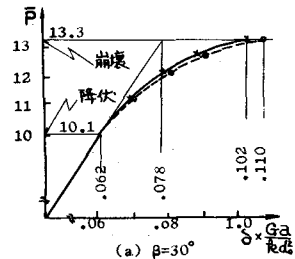
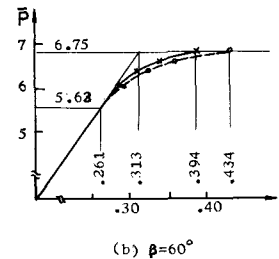


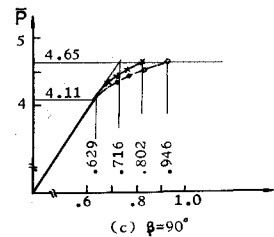
図-6



(a) $\beta = 30^\circ$



(b) $\beta = 60^\circ$



(c) $\beta = 90^\circ$

図-7 REUSS
HENCKY