

1. まえがき

前報¹⁾において、せん断形ラーメンの応答解析の簡易化を図るため、理想化した復元力特性より弾塑性性の簡単な判別式を誘導して、変動繰返し水平荷重による、曲げのみを考慮した解析法を示したが、本報ではさらに死荷重による軸力の影響をも加味した弾塑性応答計算法を提示し、計算例として門型ラーメンにおける軸力の動的挙動に及ぼす影響を検討するものである。

なお、本解析においては軸力の存在による柱の不安定現象および ductility factor の減少は生じないものと仮定する。

2. モデルの復元力特性

前報と同じく解析を容易にするため、理想化したせん断形ラーメンを考え、次の仮定を設ける。

- 1) ラーメンは剛強な地盤に固定されている。地盤の水平振動は考えるが、回転は考えない。
- 2) ラーメンの質量は各階床位置に集中している。
- 3) 床およびはりとは十分剛であり、柱の曲げモーメント一部材角

曲線は図-1に示すように理想化した形とする。

ここに図中の M_p : 軸力の影響を考慮した塑性モーメント,
 $K = 6EI/l$, EI : 柱の曲げ剛性, l : 柱の高さ, $R_p = M_p/K$,
 R^e : 弾性部材角, R^p : 塑性部材角。

- 4) 減衰力は無視する。

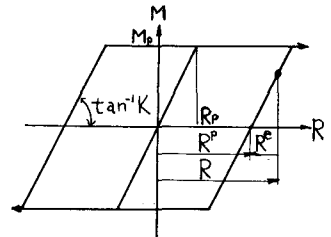


図-1

図-2は1本柱をとり出したもので、柱上部の建物の重量によって柱に生じる軸力を N とし、柱頭柱脚の曲げモーメントを M とする。

図-3(a)のごとき工形断面の場合には、曲げモーメント M と軸力 N との比によって、中立軸が web にある場合と flange にある場合とに分れるが、図-3(b),(c)のように M_p と N とが作用する極限時の M_p と N の相関々係を求めれば次式がえられる。

- 1) 中立軸が web にある場合

$$\left| \frac{M_p}{M_0} \right| = 1 - \alpha \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\{2Bt_1 + t_1(A-2t_1)\}^2}{4t_1\{Bt_1(A-t_1) + t_1(\frac{A}{2}-t_1)^2\}}$$

M_0 : 曲げモーメントのみでの終局耐力

N_0 : 軸力のみでの終局耐力

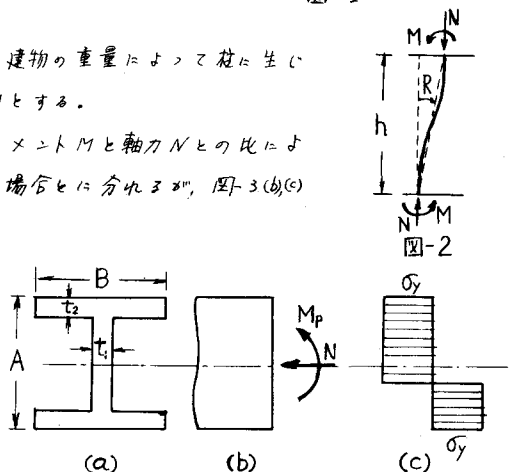


図-3

①中立軸が+1/2h にある場合

$$\left| \frac{M_p}{M_0} \right| = c \left\{ \left(\frac{A}{2} \right)^2 - b^2 \right\} - 2ab \frac{N}{N_0} - a^2 \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (2)$$

$$\text{ただし } a = \{ t_1(A/2 - t_1) + B t_1 \} / B, \quad b = (A/2 - t_1)(B - t_1) / B, \quad c = B / \{ B t_1(A - t_1) + t_1(A/2 - t_1)^2 \}$$

3. 弾性時の基本式

次にラーメンの振動方程式と Lagrange の方程式より誘導し、これを差分法にて解く際、必要となる弾性時の判別式、曲げモーメントおよび塑性部材角の算定式を求めることとする。

任意時刻 t において、 i 層 j 番目の柱が弾性であれば、その両端の曲げモーメント $M(t)$ は図1、2を参照して次式で表わされる。

$${}_jM_i(t) = {}_jK_i {}_jR_i^e(t) = {}_jK_i [R_i(t) - {}_jR_i^p(t)] = {}_jK_i \left[\frac{X_i(t) - X_{i-1}(t)}{h} - {}_jR_i^p(t) \right] \quad (3)$$

ただし ${}_jK_i$: i 層 j 番目の柱のばね定数, ${}_jR_i^e$: 同柱の弾性部材角, ${}_jR_i^p$: 同柱の塑性部材角,

R_i : i 層の部材角, X_i, X_{i-1} : $i, i-1$ 層の地盤に対する水平変位,

すなわち、柱は弾性と仮定してこれをえ、時間間隔 k を十分小さくとすれば、1 step 前の時刻 $t-k$ までの微小時間の塑性変形量は零となり、式(3)の右辺第2項の ${}_jR_i^p(t)$ は

$${}_jR_i^p(t) = {}_jR_i^p(t-k) \quad (4)$$

となる。よって式(4)を式(3)に代入すれば次式がえられる。

$${}_jM_i(t) = {}_jK_i [R_i(t) - {}_jR_i^p(t-k)] \quad (5)$$

式(5)が、柱の $M-R$ 曲線を図1のように仮定した場合の弾性時の曲げモーメント一般式で、通常次の条件を満足する。

$$|{}_jK_i [R_i(t) - {}_jR_i^p(t-k)]| < M_p \quad (6)$$

換言すれば、式(6)が成立するとき、柱は弾性と判別され、曲げモーメントは式(5)で表わされることとなる。よって式(6)を弾性時の判別式と呼ぶ。

軸力による付加モーメントを無視すれば、柱1本のポテンシャルエネルギーは M^2/K で表わされ、 m 層 m 層間ラーメン全体のポテンシャルエネルギーが次のように求められる。

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{{}_jM_i^2}{{}_jK_i} \quad (7)$$

一方ラーメン全体の運動エネルギーは、 i 層のはりに集中する重量を既、 i 層と地盤の相対速度を $\dot{x}_i$ とし、地盤の速度を $\dot{x}_0$ とおけば

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \frac{W_i}{g} (\dot{x}_i + \dot{x}_0)^2 \quad (8)$$

で与えられる。

よって式(7), (8)と Lagrange の方程式より各層の振動方程式を求めれば次式がえられる。

$$\frac{W_i}{g} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_0) + \sum_j \left[\frac{2{}_jM_i}{h_i} - \frac{2{}_jM_{i+1}}{h_{i+1}} \right] = P_i(t) \quad (9)$$

ただし $P_i(t)$ は i 層のはりに作用する水平荷重である。

式(1)に初期条件を用いて、時刻 $t=0$ における i 層の地盤に対する加速度 $\ddot{x}_i(0)$ を求めれば、これより1step後の時刻 $t=k$ における水平変位 $x_i(k)$ が次式より算定される。

$$x_i(k) = x_i(0) + k\dot{x}_i(0) + \frac{1}{2}k^2\ddot{x}_i(0) \quad (10)$$

よって時刻 $t=2k$ 以後の水平変位は、式(7)を差分化してえられる次式の式(11)と式(6)、(5)および式(4)の繰返し演算により逐次決定されることとなる。

$$x_i(t+k) = -\frac{gk^2}{2c} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{Z_j M_{ij}(t)}{h_{ij}} - \frac{Z_j M_{ij}(t)}{h_{i+1}} - F_i(t) \right] + 2x_i(t) - x_i(t-k) - k^2 \ddot{x}_i(t) \quad (11)$$

4. 塑性時の基本式

荷重が増大し、柱が塑性域にはいれるば、弾性を判別する式(6)、曲げモーメントの式(5)および塑性部材角の式(4)に替わる塑性時の判別式、曲げモーメントおよび塑性部材角の算定式が必要となる。

いま、時刻 t において柱が塑性域にあると仮定すれば、曲げモーメントが正の塑性モーメントの場合と負の塑性モーメントの場合とが考えられる。その判別式は、図1のM-R曲線より誘導され、前報の結果を用いれば次式で与えられることとなる。

$$\left. \begin{aligned} jK_i \{ R_i(t') - jR_i^p(t'-k) \} &\geq M_p \quad \text{で} \quad jM_i(t') = M_p \\ jK_i \{ R_i(t') - jR_i^p(t'-k) \} &\leq -M_p \quad \text{で} \quad jM_i(t') = -M_p \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

一方塑性時の水平変位算定式は、弾性時のそれと全く合致するが、その根拠は次のとおりである。
 i 層 j 層目の柱が塑性になると、柱頭柱脚にはいれる塑性ヒンジが形成されるが、これは単なるヒンジに塑性モーメントが作用してゐるものであり、この塑性モーメントを外力モーメントとみなせば、弾性時の振動方程式たる式(9)の左辺の jM_i は常となるが、右辺の一般力の項に塑性モーメントが含まれ、結局塑性時の水平変位算定式は式(11)で与えられることとなる。

このとき、柱頭柱脚には一定曲げモーメントのせいで塑性変形が進行する。いま、時刻 $t-k$ から t までの微小時間に増加する塑性部材角を $\Delta R_i^p(t-k)$ とおけば次式が成立する。

$$\Delta R_i^p(t-k) = jR_i^p(t) - jR_i^p(t-k) \quad (13)$$

一方 $\Delta R_i^p(t-k)$ は前報と同様にM-R曲線の幾何学的関係に注目すれば、塑性モーメントの正負にかかわらず、次式で求められる。

$$\Delta R_i^p(t-k) = \frac{1}{jK_i} [j\bar{M}_i(t) - jM_i(t)] \quad (14)$$

$$\text{ただし} \quad j\bar{M}_i(t) = jK_i [R_i(t) - jR_i^p(t-k)]$$

よって時刻 t における塑性部材角は式(13)と変形して

$$jR_i^p(t) = jR_i^p(t-k) + \Delta R_i^p(t-k) \quad (15)$$

で算出されることとなる。

5. 数値計算例

軸力とせん断形ラーメンの動的挙動に及ぼす影響を調べるために、図-4に示す門型ラーメンを例にとり、図-5に示す水平荷重を作用させて、曲げと軸力とを考慮した場合と曲げのみを考慮した場合の応答計算を行った。

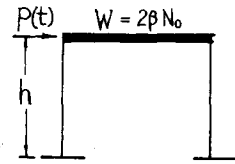


図-4

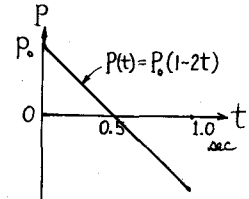


図-5

その際、はりに集中する重量は軸力のみによる柱の終局耐力 N_0 の $2\beta N_0$ 倍、水平荷重 $P(t)$ は静的崩壊荷重 $P_0 = 4M_0/h$ の $(1-2t)$ 倍とし、柱の断面は2つの図-3(a)に示すI形として、次の諸元を用いることとする。

$$A = B = 25.0 \text{ cm}, t_1 = 0.9 \text{ cm}, t_2 = 1.4 \text{ cm}, h = 4.0 \times 10^2 \text{ cm}$$

$$\text{断面二次モーメント } I = 1.07 \times 10^4 \text{ cm}^4, \text{ 弾性定数 } E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{降伏応力 } \sigma_y = 4.0 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2, k = 0.2 \text{ sec}$$

図-6および図-7は無次元化された軸力 $N/N_0 = \beta$ をパラメータとして、水平変位および塑性部材角を図示したもので、実線は曲げと軸力とを考慮した場合を、破線は曲げのみを考慮した場合を示している。

$\beta = 0.07$ では軸力の影響は無視しう程度小さいが、 $\beta = 0.2$ になると動的挙動そのものは両者とも同一傾向を示しているにもかかわらず、塑性変形は45%も増大していることが認められる。さらに $\beta = 0.4$ では軸力の影響がより顕著に現われ、軸力の存在はもはや無視しえないものとなっている。

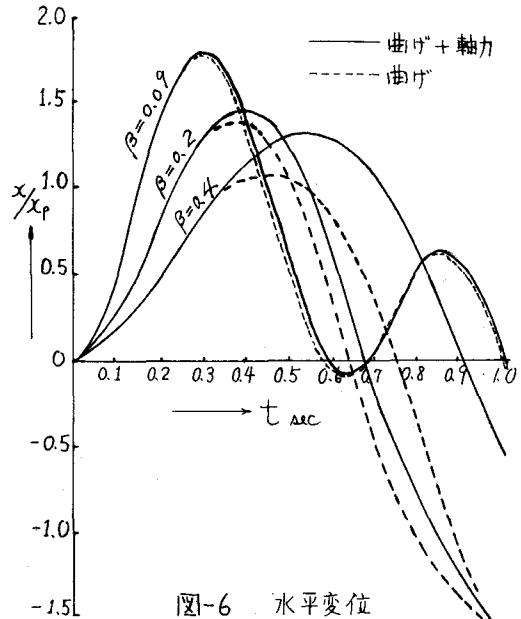


図-6 水平変位

6. おわりに

完全弾塑性型復元力特性を有するせん断形ラーメンの水平荷重に対する応答解析法として、柱の曲げと軸力とを考慮した差分法による繰返し算法を提示し、 $N/N_0 = \beta > 0.4$ の通常値であることと高層建造物の応答解析には軸力による塑性モーメントの低減が無視できないことを明らかにした。

参考文献

1. 山崎 黒木: 水平荷重によるラーメンの動的弾塑性解析
昭和44年度土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和44年2月

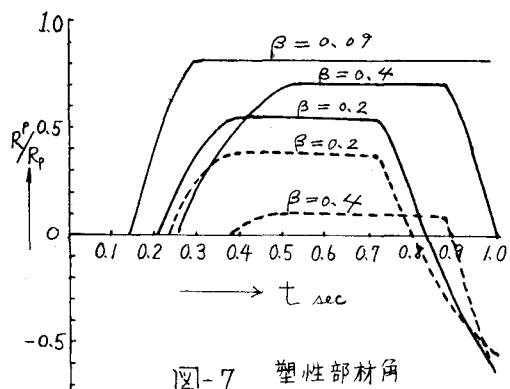


図-7 塑性部材角