

1-7

走行荷重を受ける弾性基礎上の板の応力解析

九州大学 正員 山崎徳也

・ ○横田 漢

1. 緒言

構造物の設計において近來、動荷重の効果がますます重要視されつつあるが、未だ十分に解明されていない問題も多く見られる。本論文はその一分野として弾性基礎上の板を取り上げ、それが走行線荷重を受ける場合の動的応答の解明を提示するものである。

なお、弾性基礎は簡便のためこれを一様なバネが分布した Winkler 支承と見做して取り扱うことが多いが、この仮定も実際の基礎に適用することは聊疑義があり、本報では弾性基礎を半無限弾性体と考え、波動方程式を用いて厳密解析を行い、もって Winkler 支承の妥当性に対する検討をも併せ行ふ。

なお、解析にあたっては次の慣用仮定を用いた。

(i) 板および基礎の振動状態は定常であり、荷重とともに移動する系から見た場合、それらの変形は一定である。

(ii) 荷重の走行速度は基礎における P 波、S 波の伝播速度より小さい。

2. 解法

(1) 板の基本式 弾性基礎上の板が荷重 $p(x, y, t)$ を受

ける場合、板の振動は周知のごとく次式で表わされる。

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{N} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p - g}{N} \quad (1)$$

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2, \quad N = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

ρ : 板の密度, h : 板厚, E : 板の弾性係数

ν : 板のポアソン比, w : 板のたわみ

g : 基礎の反力

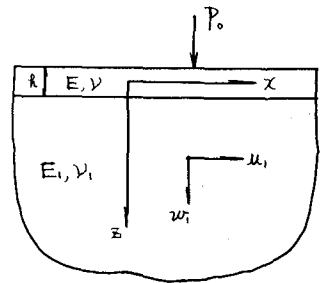


図-1

いま、図-1に示すごとく、座標 (x, y, z) を導入し、線荷重 $p(x, t)$ が x の正方向に定速度 C で移動するものと考え、 $p(x, t)$ は y 方向に一様であり、また定常状態という仮定より式(1)は結局次式のごとなる。

$$\frac{\partial^4 w(r)}{\partial r^4} + \frac{\rho h}{N} C^2 \frac{\partial^2 w(r)}{\partial t^2} = \frac{P \delta(r) - g(r)}{N} \quad (2)$$

ただし $r = x - Ct$, $P \delta(r) = p(r)$, $\delta(r)$: Dirac's delta function

(2) 弾性基礎 弾性基礎に關して以下 i) 半無限弾性体, ii) Winkler 支承に別けて解析を進める。

i) 半無限弾性体 半無限弾性体における運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx1}}{\partial z}, \quad \rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{zx1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{z1}}{\partial z} \quad (3)$$

他方、変位と応力の間には周知のとおり次の関係式がある。

$$\sigma_{z1} = \lambda_1 \Delta_1 + 2G_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \sigma_{z1} = \lambda_1 \Delta_1 + 2G_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}, \quad \tau_{zx1} = \tau_{zx1} = G_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \quad (4)$$

$$\text{かくして} \quad \Delta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z}, \quad \lambda_1 = \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \quad G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$$

いま、変位 u_1, w_1 をポテンシャル関数 ϕ, ψ を用いて次のように表わす。

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w_1 = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入すれば次のようになる。

$$\sigma_{z1} = \lambda_1 \nabla^2 \phi + 2G_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \quad \sigma_{z1} = \lambda_1 \nabla^2 \phi + 2G_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (6)$$

$$\tau_{zx1} = \tau_{zx1} = G_1 \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

式(5), (6)を式(3)の運動方程式に代入してえられる式は、次の波動方程式を満足するものと ϕ, ψ に関して成立する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi, \quad \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi \quad (7)$$

$$\text{かくして} \quad \beta^2 = C_L^2 / C_T^2, \quad C_L = \sqrt{(\lambda_1 + 2G_1) / \rho_1}, \quad C_T = \sqrt{G_1 / \rho_1}, \quad \tau = C_L t \quad \text{であり,}$$

C_L, C_T はそれぞれ P 波, S 波の伝播速度である。

以下、式(7)の波動方程式を解くのであるが、これらの式に $r = x - Ct = x - \beta_L \tau$ を代入すればそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + m^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + n^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad (8)$$

$$\text{かくして} \quad m^2 = 1 - \beta_L^2, \quad n^2 = 1 - \beta_T^2, \quad \beta_L = C / C_L, \quad \beta_T = C / C_T$$

式(8)にフーリエ変換を施せば次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - m^2 \alpha^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - n^2 \alpha^2 \Psi = 0 \quad (9)$$

$$\therefore \quad \Phi(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, z) e^{-i\alpha r} dr, \quad \Psi(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, z) e^{-i\alpha r} dr$$

式(9)を解けば

$$\Phi = \bar{A} e^{i|\alpha|z} + \bar{B} e^{-i|\alpha|z}, \quad \Psi = \bar{C} e^{i|\alpha|z} + \bar{D} e^{-i|\alpha|z} \quad \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} : \text{積分定数}$$

$z = z, z \rightarrow \infty$ のとき変位、応力は 0 と考えれば、 $\bar{A} = \bar{C} = 0$ となり、したがって Φ, Ψ は

$$\Phi = \bar{B} e^{-i|\alpha|z} = B e^{-i|\alpha|(z - \tau/2)}, \quad \Psi = \bar{D} e^{-i|\alpha|z} = D e^{-i|\alpha|(z - \tau/2)} \quad (10)$$

一方、式(5), (6)より次の式がえられる。

$$w_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - i\alpha \Psi, \quad \sigma_{z1} / 2G_1 = \lambda_1 / 2G_1 \cdot (-\alpha^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - i\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (11)$$

$$\tau_{zx1} / G_1 = 2i\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

かくして $w_1, \sigma_{z1}, \tau_{zx1}$ はそれぞれ $w_1, \sigma_{z1}, \tau_{zx1}$ のフーリエ変換である。

式(10)を式(11)に代入すれば $w_1, \tau_{zx1}, \sigma_{z1}$ は次の内容となる。

$$w_1 = -|\alpha| B e^{-i|\alpha|(z - \tau/2)} - i\alpha D e^{-i|\alpha|(z - \tau/2)}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{z1}}{2q_1} = \frac{\lambda_1}{2q_1} \left\{ -\alpha^2 B e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)} + (\alpha d)^2 B e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)} \right\} + (\alpha d)^2 B e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)} + i d |\alpha d| D e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)}$$

$$\frac{\bar{\tau}_{zx1}}{q_1} = -2 i d |\alpha d| B e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)} + d^2 D e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)} + (\alpha d)^2 D e^{-\lambda_1 d(2-\beta/2)} \quad (12)$$

他方、板の基本式(2)より板のたわみ w に関して次式がえられる。

$$W(\alpha) = \frac{P_0 - \bar{q}}{N \cdot H(\alpha)}, \quad H(\alpha) = \alpha^2 \left(\alpha^2 - \frac{\rho R}{N} \cdot C^2 \right) \quad (13)$$

ここに、 $W(\alpha)$ 、 $\bar{q}(\alpha)$ はそれぞれ板のたわみ $w(r)$ 、基礎の反力 $q(r)$ のフーリエ変換である。

そこで、板と基礎の接界面において次の3つ境界条件を考える。可なり

$$w_1(r, \beta/2) = w(r), \quad \sigma_{z1}(r, \beta/2) = -q(r), \quad \tau_{zx1} = 0 \quad (14)$$

式(14)の各境界条件式(12)の両辺をフーリエ変換し、式(12)、(13)と代入すれば積分定数 B 、 D が次式の3つで決定される。

$$B = \frac{P_0 \cdot R^3}{N \cdot \alpha^2} \cdot \frac{2 - \beta^2}{F(|\alpha| R)}, \quad D = \frac{P_0 \cdot R^3 \cdot 2 i |\alpha|}{N \cdot \alpha^3} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2/\beta^2}}{F(|\alpha| R)} \quad (15)$$

ただし

$$F(|\alpha| R) = \beta^2 \sqrt{1 - \beta^2/\beta^2} \left\{ |\alpha|^3 R^3 - 6(1-\nu) \frac{\rho}{2} \beta^2 |\alpha| R \right\} - 24(1-\nu) q R$$

$$R = (1 - \beta^2/2)^2 - \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta^2/\beta^2}, \quad q = q_1/q, \quad l = \rho_1/\rho$$

板のたわみ $w(r)$ は式(13)より

$$w(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha) e^{i\alpha r} d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha d| B + i d D) e^{i\alpha r} d\alpha \quad \text{で与えられるから}$$

板の任意点のモーメント $M(r)$ は

$$M(r) = -N \frac{\partial w}{\partial r^2} = -\frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 [|\alpha d| B + i d D] e^{i\alpha r} d\alpha \quad (16)$$

式(15)と式(16)に代入すれば、結局板の任意点におけるモーメントに関して次式を得る。

$$\frac{M(r)}{P_0 R} = \frac{\beta^2 \sqrt{1 - \beta^2/\beta^2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{F(\xi)} \cos(R\xi) d\xi \quad (17)$$

$$\text{ただし } \xi = \alpha \cdot R, \quad R = r/R$$

ii) Winkler 支承 弾性基礎を Winkler 支承と看做すれば、式(2)における基礎の反力 $q(r)$ は周知の3つで次式で与えられる。

$$q(r) = k \cdot w(r) \quad k: \text{沈下係数}$$

したがって、式(13)の $W(\alpha)$ は次式の内容となる。

$$W(\alpha) = \frac{P_0}{N \cdot G(\alpha)}, \quad G(\alpha) = \alpha^4 - \frac{\rho R}{N} C^2 \alpha^2 + \frac{k}{N} \quad (18)$$

したがって板のたわみ $w(r)$ は

$$w(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_0 e^{i\alpha r}}{2\pi N \cdot G(\alpha)} d\alpha = \frac{P_0}{\pi N} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha r)}{G(\alpha)} d\alpha$$

で与えられるから、モーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^2}{q(\alpha)} \cos(\alpha x) d\alpha$$

ここで、沉下係数 k に関して次式を導入する。 $k = a \cdot E_1 \left(\frac{E_1}{2N} \right)^{1/2}$, $a = 0.355957$ ¹⁾

よって、板の任意点におけるモーメントは結局次式のごとく与えられる。

$$\frac{M(x)}{P_0 R} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{F^2}{q(\xi)} \cos(R\xi) d\xi \quad (19)$$

$$F(\xi) = \xi^4 - 6(1-\nu) \frac{q}{E} \beta_T^2 \xi^2 + a \cdot 12(1-\nu)(1+\nu) q \{ 6(1-\nu)(1+\nu) \}^{1/2} \xi$$

3. 数値計算および考察

計算例として、いま $\nu = 0.25$, $\lambda = 0.694$, $q = 0.125$ の場合における式(17), (19)のモーメントの値を算出すれば図-3に示す結果となる。なお、図-2は式(17)の積分に際して必要な $F(\xi) = 0$ の根を種々の β_T に対して求め、図示したものである。

図-3より、まず荷重速度が大い場合 ($\beta_T = 0.7$) には、荷重直下の点におけるモーメントの値は荷重が静的に作用した時 ($\beta_T = 0$) に比較して、Winkler 支承および半無限弾性体でそれぞれ約 1.20 および 1.50 倍ほど大きく、また基礎を Winkler 支承と見なした場合と半無限弾性体と見た場合の性状は著しく相違していることが読み取れる。次に荷重速度が小さい場合 ($\beta_T = 0.3$) には、荷重が静的に作用した時と大差なく、また Winkler 支承と半無限弾性体との性状の差も荷重直下の近傍 ($R < 1.1$) においてはほとんど認められないことなどがわかる。

4. 結論

図-2に見るごとく $F(\xi) = 0$ が $\beta_T = 0.852$ で重根をもつため、式(17)の値はその速度 (critical velocity) で無限大になる。このため、高速度の場合には半無限弾性体と Winkler 支承との相違が著しく表れるものと思われ、かかることをより、Winkler 支承は荷重速度が小さい場合のみ妥当であると考えられる。

1). 半無限弾性体上の板および Winkler 支承上の板に荷重が静的に作用したときの荷重直下におけるそれぞれのモーメントが等しくなるごとく k の値であり、例へば Biot, M. A, "Bonding of an Infinite Beam on an Elastic Foundation", Journal of App. Mech. Vol. 59, 1937, 参照。

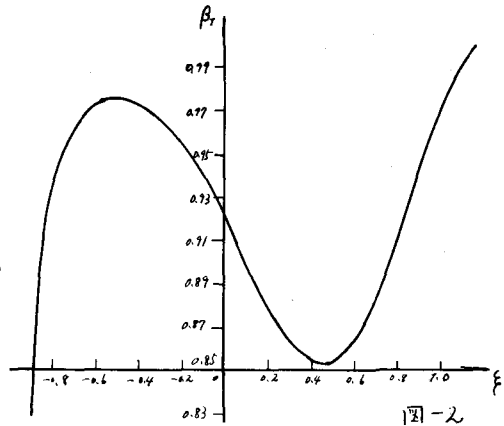


図-2

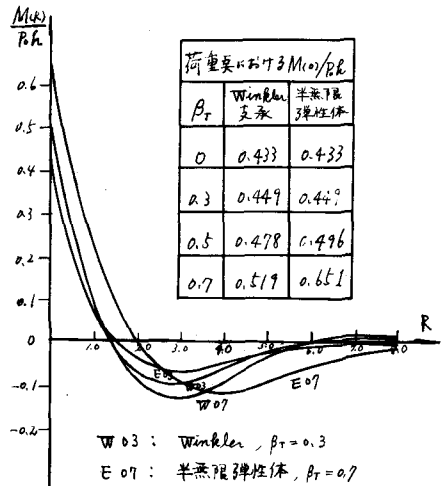


図-3