

1-6

任意形孔をもつ任意形板の座屈荷重算定法

九州大学 正員 山崎徳也

〃 学生員 〇後藤恵之輔

1. 序

有孔有限板の座屈荷重は座屈の際の平衡方程式およびすべての境界条件も満足する薄板のたわみ変形が求まれば正しく決定される。しかし、かかるたわみ変形も求むことは極めて困難であるゆえ、通常は境界条件のみも満足するたわみ変形を仮定してエネルギー法¹⁾によるか、あるいは対象とする板を幾つかの要素に分割して Finite Element Method²⁾ により座屈荷重の近似値も決定している。

他方、最近の電子計算機の発達に伴ってポイントマッチング法³⁾が固有値問題の近似解法として注目されるようになり、これによって孔が無い円板や三角形板、正方形板および六角形板の座屈問題⁴⁾が解かれているが、ポイントマッチング法はエネルギー法および Finite Element Method に比較して少量の計算で任意形板の座屈荷重も求めるという利点も有する。

そこで著者らは有孔有限板において孔が小さければ、孔の無い場合の平衡方程式が近似的に成立することに着目して、ここにポイントマッチング法による小さな任意形孔をもつ任意形板の座屈荷重算定法を提示するものである。解法は中心に円孔も有する周辺固定、孔縁自由の正方形板について説明し、精度も吟味する意味でエネルギー法による別法をも併せ示すこととする。

2. 座屈荷重算定法

図-1に示すごとく中心に円孔も有する正方形板が二次元静水圧もうけるとき、孔径(2R)が正方形板の辺長(2a)に比較して小なる場合には、応力集中は孔縁の極く近傍においてのみ起り、その他の部分は孔が無い場合の応力状態に等しいと考える。したがって、二次元静水圧もうける孔無し正方形板の平衡方程式の一般解を用いて、比較的小きな円孔も有する正方形板の座屈荷重がポイントマッチング法により容易に算定されることとなる。

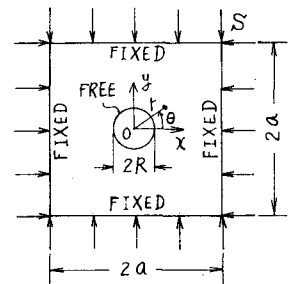


図-1

一般に、孔無しの薄板が二次元静水圧もうける場合の平衡方程式は周知のごとく極座標により、次式で与えられる。

$$\Delta(\Delta + k^2)w = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$k^2 = St/D$, S : 単位面積当りの静水圧, t : 板厚, D : 板の曲げ剛性

w : 薄板のたわみ

式(1)の一般解は $w = f(r) \cos n\theta$ として次式のごとく決定される。

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n (kr)^n + D_n (kr)^{-n}] \cos n\theta \quad (2)$$

ここに J_n , Y_n はそれぞれ第1種および第2種の Bessel 級数、 $A_n \sim D_n$ は境界条件より決定される未定係数で $n=0, 1, 2, \dots$ である。

したがって、図-1のごとく円孔も有する正方形板のたわみは対称条件も考慮して式(2)より求め

的に次式で表わされる。

$$w = A J_0(kr) + B Y_0(kr) + C + D J_4(kr) \cos 4\theta + E Y_4(kr) \cos 4\theta \\ + F(kr)^4 \cos 4\theta + G(kr)^4 \cos 4\theta + \dots \quad (3)$$

一方、周辺固定、孔縁自由であるゆえ、境界条件として次式が成立する。

$$\text{周辺において} \quad w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

$$\text{孔縁において} \quad M_r = Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\text{ここに} \quad M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\}$$

$$M_{\theta} = (1-\nu) D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right\}$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

ν : ポアソン比

式(3)も式(4)、(5)も代入することにより係数 $A, B, C, \dots$ が決定されるわけであるが、本論では図-2に示すごとく周辺および孔縁ともに3個の点において境界条件を満足させることとする(この6個の boundary points は対称条件により板全体では計32個となる)。この結果、式(3)の未定係数も決定する式が次のごとくえられることとなる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & a_{14} & \dots & a_{112} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & \dots & a_{212} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{12} & 0 & a_{14} & \dots & a_{112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ \vdots \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

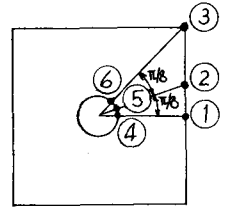


図-2

ここに $a_{11} = J_0(ka)$, $a_{12} = Y_0(ka)$, $a_{14} = J_4(ka)$, $\dots$, $a_{112} = J_{12}(ka)$,

$a_{21} = ka \cdot J'_0(ka)$, $a_{22} = ka \cdot Y'_0(ka)$, $a_{24} = ka \cdot J'_4(ka)$, $\dots$, $a_{212} = ka \cdot J'_{12}(ka)$,

$a_{31} = J_0(ka \cdot \pi/8)$, $a_{32} = Y_0(ka \cdot \pi/8)$, $\dots$,

$a_{41} = (\mu ka)^3 J_0''(\mu ka) + (\mu ka)^3 J_0'(\mu ka) - \mu ka \cdot J_0'(\mu ka)$, $\dots$, $\mu = R/a$

式(6)の連立方程式が a_{mn} ($m, n = 1 \sim 12$) の0でない有限解に対して成立するためには、その係数行列式が0に等しかるべく、この行列式より所要の固有値 k がえられ、したがってこの決定された k も用いて座屈荷重 S_{cr} が次式のごとく求められる。

$$S_{cr} = \bar{k}^2 \frac{D}{a^3} \quad (7)$$

ここに $\bar{k} = ka$

なお、決定された k の値も a_{mn} に代入することにより座屈の際の薄板のたわみ変形が求められる。

3. イネルギー法について

前節で述べたポイントマッチング法による座屈荷重算定法の精度も吟味する意味で、広く用いられているインエルギー法を本問題に適用すれば以下のごとくである。

板の曲げによる歪み ϵ インネルギーおよび座屈の際に応力のなす仕事 W 、 T とすれば、これは次式で与えられる。

$$V = \frac{D}{2} \iint_{\text{surface}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right\} dx dy \quad (8)$$

$$T = \frac{St}{2} \iint_{\text{surface}} \left\{ \frac{\sigma_x}{S} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\tau_{xy}}{S} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\sigma_y}{S} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (9)$$

ここに直交座標における応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} は式(10)で表わされる極座標の応力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ と式(11)の変換公式とにより $r = r/R$ として次のごとく求められる。すなわち

$$\text{応力成分: } \sigma_r = S(1-r^2), \sigma_\theta = S(1+r^2), \tau_{r\theta} = 0 \quad (10)$$

$$\text{変換公式: } \left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(10)を式(11)に代入すれば式(9)中の応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= S(1-r^2 \cos 2\theta) \\ \sigma_y &= S(1+r^2 \cos 2\theta) \\ \tau_{xy} &= -S \cdot r^2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

座屈荷重 S_{cr} は、境界条件のみを満足するたわみ波形状 w を仮定して、これを式(8)および式(9)のエネルギー式に代入し、さらに式(12)の応力系を式(9)に代入のうえ、式(8)と式(9)とを等置することによって直ちに決定されることとなる。なお、 w を仮定する場合、座屈荷重が最小となるように仮定することは勿論である。

図-1のごとく中心に円孔を有する正方形板の座屈形式としては、常識的に対称座屈が考えられるゆえ、次のたわみ波形状を仮定する。

$$w = w_0 \{ \cos^2 \pi x_1 \cos^2 \pi y_1 + b e^{-c(x_1^2 + y_1^2)} \} \quad (13)$$

ここに w_0 は unit deflection, $x_1 = x/a, y_1 = y/a$ で係数 b, c は孔縁の境界条件より決定される定数である。しかるに孔径は正方形板の辺長に比較して小であるゆえ、孔縁近傍において式(13)は $r_2 = r/a$ として次のごとく変形される。

$$w = w_0 (1 - \pi^2 r_2^2 + b e^{-c r_2^2}) \quad (14)$$

式(14)を孔縁の境界条件式(5)に代入すれば、係数 b および c の決定式が次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \log b &= 2 \log(R/a) + 1.2444 = 2 \log \mu + 1.2444 \\ c &= 2/(R/a)^2 = 2/\mu^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(5)より μ の各値につき b, c を求めれば表-1のごとくで、() 中の数字は式(13)を r_2 のヤキ級数ではなく Bessel 級数を用いて変形した熊井教授の値である(文献(1)参照)。

表-1 係数 b, c の値 ($\nu = 0.3$)

$\mu = R/a$	b	c
0.05	0.04389 (0.0925)	800.0 (810.39)
0.10	0.1756 (0.1860)	200.0 (208.69)
0.15	0.3950 (0.2802)	88.89 (102.0)
0.20	0.7023 (0.3731)	50.00 (67.30)
0.25	1.097 (0.4789)	32.00 (58.52)
0.30	1.580 (—)	22.22 (—)

表-1 より容易に判断されるごとく、 b/b_1 より小であるが、あるいは1と比較しうる程度の値であるのに対し、 c は1より極めて大きな値である。したがって、正方形板の周辺近傍においては、式(13)の第2項は第1項に比して無視することかでき、式(13)のたわみ波形は周辺の境界条件式(4)も満足することとなる。よって式(12)の応力系と式(13)のたわみ波形とを式(8)、(9)のエネルギー式に代入し、Gauss 法などの数値積分法を用いて V 、 T を計算し、これらを等置することにより所要の座屈荷重 S_{cr} が求められるのである。

4. 結び

以上、ポイントマッチング法による任意形孔をもつ任意形板の座屈荷重算定法およびこの精度を吟味するためのエネルギー法による算定法も、中心に円孔を有する周辺固定、孔縁自由の正方形板について説明した。エネルギー法では式(8)、(9)で表わされる歪みエネルギーおよび応力のなす仕事の数値積分がかなり煩雑を招来するのに対し、ポイントマッチング法では Bessel 級数のガブールタンを利用することにより電子計算機を用いた行列式の演算のみで座屈荷重も決定しうることが容易に知られよう。ポイントマッチング法による種々の孔、たとえば円孔、正方形孔、正八角形孔などを有する正方形板を初めとする各種形状板について、座屈荷重が境界条件によりいかに変化するかも現在計算中であり、これについては後日、篇を改めて発表する所存である。

最後に有益なる御助言を賜った本学応用力学研究所熊井豊二教授に厚く謝意を表するとともに、本研究には文部省科学研究費の補助もうけたことも付記する。

参考文献

- 1) T. Kumai: Elastic Stability of the Square Plate With a Central Circular Hole under Edge Thrust, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., Vol. I, No. 2, 1952.
吉誠雅夫他: 有孔板の座屈強度について(その1), 造船協会論文集, 第122号, 昭和42年12月.
- 2) R. G. Anderson, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz: Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, Intern. J. Solids and Structures, Vol. 4, No. 10, Oct. 1968.
- 3) J. Barta: Über die näherungsweise Lösung einiger zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben, Z. A. M. M., Bd. 17, 1937.
- 4) H. D. Conway and A. W. Leissa: A Method for Investigating Certain Eigenvalue Problems of the Buckling and Vibration of Plates, Jour. Appl. Mech., Vol. 27, No. 3, Sept. 1960.
H. D. Conway: The Bending, Buckling, and Flexural Vibration of Simply Supported Polygonal Plates by Point-Matching, Jour. Appl. Mech., Vol. 28, No. 2, Jun. 1961.