I-5　積載荷重による梁の固有周期の変化について

九州大学　正員　山崎徳也
長崎大学　正員　○崎山毅

1、まえがき

梁の自由振動の性状は固有周期と振動型とにより表わされる。そして、固有周期および振動型は、梁の長さ、曲げ剛性、単位長さ当りの質量などの諸要素と境界条件とから、知ることができる。

すでに、考えうる全ての境界条件の下で、一様な断面をもつ梁の曲げ振動が解析されていることは周知のとおりであるが、梁が荷重を担う構造物であるということを考えれば、実際には、より重要な問題であると見なすべき、載荷状態にある梁の自由振動に関しての研究は少ない。

本論文は、荷重積載状態にある梁の自由振動を解析し、その固有値および振動型を求めたものである。

2、載荷梁の自由振動

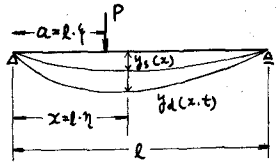

図-1

図-1に示すとおり、荷重Pによる梁の静たわみを$y_s(x)$、載荷状態にある梁の自由振動たわみを$y_d(x,t)$とすれば、これら二つのたわみは、それぞれ次の各式により与えられる。

$$EI\frac{d^4y_s}{dx^4}=P\delta(x-a) \tag{1}$$

$$EI\frac{\partial^4y_d}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2y_d}{\partial t^2}=\left(P-\frac{P}{g}\frac{\partial^2y_d}{\partial t^2}\right)\delta(x-a) \tag{2}$$

$\delta(x-a)$はDirac の delta function である。振動中、常に荷重は梁に接触している状態（今後、接触振動と仮称する。）を考えるものとすれば、式(2)の右辺において

$$P-\frac{P}{g}\left|\left[\frac{\partial^2y_d}{\partial t^2}\right]_{x=a}\right|\geqq 0 \tag{3}$$

が成立しなくてはならない。

載荷状態にある梁の自由振動は、梁の無載荷状態の軸線を基準とする動たわみ$y_d(x,t)$で表わすよりも、静的平衡状態すなわち静的たわみ$y_s(x)$を基準とする新たな動たわみ$Y(x,t)$で表わす方が合理的である。

動たわみ$Y(x,t)$を与えるべき微分方程式は、以下のごとくみちびかれる。まず、たわみ$Y(x,t)$は、動たわみ$y_d(x,t)$と静たわみ$y_s(x)$とにより、次式で表わされる。

$$Y(x,t)=y_d(x,t)-y_s(x) \tag{4}$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^4Y}{\partial x^4}&=\frac{\partial^4}{\partial x^4}(y_d-y_s)=\frac{\partial^4y_d}{\partial x^4}-\frac{d^4y_s}{dx^4}\\ \frac{\partial^2Y}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(y_d-y_s)=\frac{\partial^2y_d}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

また、(2)−(1)より

$$EI\left(\frac{\partial^4y_d}{\partial x^4}-\frac{d^4y_s}{dx^4}\right)+\rho\frac{\partial^2y_d}{\partial t^2}+\frac{P}{g}\frac{\partial^2y_d}{\partial t^2}\delta(x-a)=0$$

(5)の各式を上式に代入して

$$EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+\frac{P}{g}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\delta(x-a)=0 \qquad (6)$$

すなわち，静的平衡状態を基準とする動たわみ $Y(x,t)$ は，式(6)により与えられる。ここで，$x=l\cdot\eta$，$a=l\cdot\xi$，$P/g=m$ とおいて，式(6)の無次元化をはかれば，次式を得る。

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial \eta^4}+\frac{\rho l^4}{EI}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+\frac{m l^3}{EI}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\delta(\eta-\xi)=0 \qquad (7)$$

載荷梁の固有角振動数 ω を用いて

$$Y(\eta,t)=Z(\eta)\cdot\sin\omega t$$

とおけば，式(7)より，振動型 $Z(\eta)$ を与える次式が得られる。

$$\frac{d^4 Z}{d\eta^4}-\lambda^4 Z=\mu\lambda^4 Z(\xi)\delta(\eta-\xi) \qquad (8)$$

ただし，　$\lambda^4=\rho\omega^2 l^4/EI$，　$\mu=m/\rho l$　である。

3．基礎微分方程式の解法

振動型を与える微分方程式(8)の解を求める。

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-\eta s}Z(\eta)\,d\eta \qquad \text{すなわち} \qquad \mathcal{L}[Z(\eta)]=F(s)$$

とすれば，式(8)より

$$F(s)=Z(0)\frac{s^3}{s^4-\lambda^4}+Z'(0)\frac{s^2}{s^4-\lambda^4}+Z''(0)\frac{s}{s^4-\lambda^4}+Z'''(0)\frac{1}{s^4-\lambda^4}+\mu\lambda^4 Z(\xi)\frac{e^{-\xi s}}{s^4-\lambda^4}$$

$$\therefore Z(\eta)=A\,\mathrm{ch}\lambda\eta+B\,\mathrm{sh}\lambda\eta+C\,\mathrm{co}\lambda\eta+D\,\mathrm{si}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda Z(\xi)}{2}[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi) \qquad (9)$$

ただし

$$A=\frac{1}{2\lambda^2}[\lambda^2 Z(0)+Z''(0)], \qquad B=\frac{1}{2\lambda^3}[\lambda^2 Z'(0)+Z'''(0)]$$

$$C=\frac{1}{2\lambda^2}[\lambda^2 Z(0)-Z''(0)], \qquad D=\frac{1}{2\lambda^3}[\lambda^2 Z'(0)-Z'''(0)]$$

$$\therefore Z(\xi)=A\cdot\mathrm{ch}\lambda\xi+B\cdot\mathrm{sh}\lambda\xi+C\cdot\mathrm{co}\lambda\xi+D\,\mathrm{si}\lambda\xi$$

したがって

$$\begin{aligned}Z(\eta)=&A\left\{\mathrm{ch}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{ch}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+B\left\{\mathrm{sh}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\\&+C\left\{\mathrm{co}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{co}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+C\left\{\mathrm{si}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\end{aligned} \qquad (10)$$

常数A，B，C，Dは境界条件により決定される。なお

$$\begin{aligned}Z'(\eta)=&A\lambda\left\{\mathrm{sh}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{ch}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+B\lambda\left\{\mathrm{ch}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\\&+C\lambda\left\{-\mathrm{si}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{co}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+D\lambda\left\{\mathrm{co}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}Z''(\eta)=&A\lambda^2\left\{\mathrm{ch}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{ch}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+B\lambda^2\left\{\mathrm{sh}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\\&+C\lambda^2\left\{-\mathrm{co}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{co}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+D\lambda^2\left\{-\mathrm{si}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}Z'''(\eta)=&A\lambda^3\left\{\mathrm{sh}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{ch}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+B\lambda^3\left\{\mathrm{ch}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\\&+C\lambda^3\left\{\mathrm{si}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{co}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}+D\lambda^3\left\{-\mathrm{co}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{ch}\lambda(\eta-\xi)+\mathrm{co}\lambda(\eta-\xi)]u(\eta-\xi)\right\}\end{aligned} \qquad (13)$$

4．振動数方程式および振動型

(1) 単純梁

単純梁の境界条件は　$Z(0)=Z''(0)=Z(1)=Z''(1)=0$

$$\therefore\ A=C=0,\quad Z(1)=Z''(1)=0$$

よって，式(10)，(12)より，次の振動数方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} 2\,\mathrm{sh}\lambda+\mu\lambda\,\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)] & 2\,\mathrm{si}\lambda+\mu\lambda\,\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)] \\ 2\,\mathrm{sh}\lambda+\mu\lambda\,\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)+\mathrm{si}\lambda(1-\xi)] & -2\,\mathrm{si}\lambda+\mu\lambda\,\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)+\mathrm{si}\lambda(1-\xi)] \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ \mathrm{si}\lambda=\frac{\mu\lambda}{2\,\mathrm{sh}\lambda}\left[\mathrm{sh}\lambda\cdot\mathrm{si}\lambda\xi\cdot\mathrm{si}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda\cdot\mathrm{sh}\lambda\xi\cdot\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)\right] \qquad (14)$$

また，振動型は

$$Z(\eta)=D\left\{\mathrm{si}\lambda\eta+K\,\mathrm{sh}\lambda\eta+\frac{\mu\lambda}{2}(\mathrm{si}\lambda\xi+K\,\mathrm{sh}\lambda\xi)[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]\,u(\eta-\xi)\right\} \qquad (15)$$

ただし
$$K=-\frac{2\,\mathrm{si}\lambda+\mu\lambda\,\mathrm{si}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)]}{2\,\mathrm{sh}\lambda+\mu\lambda\,\mathrm{sh}\lambda\xi[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)]}$$

(2) 固定梁

固定梁の境界条件は　$Z(0)=Z'(0)=Z(1)=Z'(1)=0$

$$\therefore\ C=-A,\quad D=-B,\quad Z(1)=Z'(1)=0$$

よって，式(10)，(11)より，次の振動数方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} 2(\mathrm{ch}\lambda-\mathrm{co}\lambda)+\mu\lambda(\mathrm{ch}\lambda\xi-\mathrm{co}\lambda\xi)[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)] & 2(\mathrm{sh}\lambda-\mathrm{si}\lambda)+\mu\lambda(\mathrm{sh}\lambda\xi-\mathrm{si}\lambda\xi)[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)] \\ 2(\mathrm{sh}\lambda+\mathrm{si}\lambda)+\mu\lambda(\mathrm{ch}\lambda\xi-\mathrm{co}\lambda\xi)[\mathrm{ch}\lambda(1-\xi)-\mathrm{co}\lambda(1-\xi)] & 2(\mathrm{ch}\lambda-\mathrm{co}\lambda)+\mu\lambda(\mathrm{sh}\lambda\xi-\mathrm{si}\lambda\xi)[\mathrm{ch}\lambda(1-\xi)-\mathrm{co}\lambda(1-\xi)] \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ \mathrm{ch}\lambda\cdot\mathrm{co}\lambda=1+\frac{\mu\lambda}{4}\left\{\begin{array}{l}[\mathrm{ch}\lambda(1-\xi)-\mathrm{co}\lambda(1-\xi)][(\mathrm{ch}\lambda-\mathrm{co}\lambda)(\mathrm{sh}\lambda\xi-\mathrm{si}\lambda\xi)-(\mathrm{sh}\lambda-\mathrm{si}\lambda)(\mathrm{ch}\lambda\xi-\mathrm{co}\lambda\xi)] \\ +[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)][(\mathrm{ch}\lambda-\mathrm{co}\lambda)(\mathrm{ch}\lambda\xi-\mathrm{co}\lambda\xi)-(\mathrm{sh}\lambda+\mathrm{si}\lambda)(\mathrm{sh}\lambda\xi-\mathrm{si}\lambda\xi)]\end{array}\right\} \qquad (16)$$

また，振動型は

$$Z(\eta)=A\left\{[(\mathrm{ch}\lambda\eta-\mathrm{co}\lambda\eta)+L(\mathrm{sh}\lambda\eta-\mathrm{si}\lambda\eta)]+\frac{\mu\lambda}{2}[(\mathrm{ch}\lambda\xi-\mathrm{co}\lambda\xi)+L(\mathrm{sh}\lambda\xi-\mathrm{si}\lambda\xi)]\cdot[\mathrm{sh}\lambda(\eta-\xi)-\mathrm{si}\lambda(\eta-\xi)]\,u(\eta-\xi)\right\} \qquad (17)$$

ただし
$$L=-\frac{2(\mathrm{ch}\lambda-\mathrm{co}\lambda)+\mu\lambda(\mathrm{ch}\lambda\xi-\mathrm{co}\lambda\xi)[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)]}{2(\mathrm{sh}\lambda-\mathrm{si}\lambda)+\mu\lambda(\mathrm{sh}\lambda\xi-\mathrm{si}\lambda\xi)[\mathrm{sh}\lambda(1-\xi)-\mathrm{si}\lambda(1-\xi)]}$$

5．振動型に関する考察

載荷梁の n 次の振動型 $Z_n(\eta)$ は次式を満足する。

$$\frac{d^4 Z_n}{d\eta^4}-\lambda_n^4 Z_n=\mu\lambda_n^4 Z_n(\xi)\,\delta(\eta-\xi)$$

上式に m 次の振動型 $Z_m(\eta)$ を乗じ，変域 $0\leq\eta\leq1$ で積分すれば

$$\int_0^1 Z_m\frac{d^4 Z_n}{d\eta^4}d\eta=\lambda_n^4\int_0^1 Z_m Z_n\,d\eta+\mu\lambda_n^4\int_0^1 Z_m Z_n\,\delta(\eta-\xi)\,d\eta$$

ここで

$$\int_0^1 Z_m\frac{d^4 Z_n}{d\eta^4}d\eta=\left[Z_m\frac{d^3 Z_n}{d\eta^3}\right]_0^1-\left[\frac{dZ_m}{d\eta}\frac{d^2 Z_n}{d\eta^2}\right]_0^1+\int_0^1\frac{d^2 Z_m}{d\eta^2}\frac{d^2 Z_n}{d\eta^2}d\eta=\int_0^1\frac{d^2 Z_m}{d\eta^2}\frac{d^2 Z_n}{d\eta^2}d\eta$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{d^2 Z_n}{d\eta^2}\frac{d^2 Z_m}{d\eta^2} d\eta = \lambda_n^4 \int_0^1 Z_n Z_m d\eta + \mu\lambda_n^4 \cdot Z_n(\xi) Z_m(\xi) \qquad (18)$$

全く同様にして
$$\int_0^1 \frac{d^2 Z_m}{d\eta^2}\frac{d^2 Z_n}{d\eta^2} = \lambda_m^4 \int_0^1 Z_n Z_m d\eta + \mu\lambda_m^4 \, Z_n(\xi) Z_m(\xi) \qquad (19)$$

式(18)、(19)より
$$(\lambda_n^4 - \lambda_m^4)\left[\int_0^1 Z_n Z_m d\eta + \mu Z_n(\xi) Z_m(\xi)\right] = 0$$
したがって、$n \neq m$ のとき $\lambda_n \neq \lambda_m$ である故
$$\int_0^1 Z_n Z_m d\eta = -\mu Z_n(\xi) Z_m(\xi) \qquad (20)$$

すなわち、載荷梁の振動型は、一般に、直交性をもたない。

6．接触振動の成立する条件

載荷梁において、荷重が常に梁に接触した状態で自由振動が起るためには、前述のとおり、式(3)が成立しなければならない。この条件は、具体的には、振動型を表わす式(15)、(17)中に含まれる未定係数D、Aなどの大きさを制限する。換言すれば、振動の原因となるエネルギーの大きさを制限するもので、条件(3)を満足しない大きさのエネルギーによって生ずる載荷梁の振動は、もはや異なったものとなる。以下、条件(3)の具体的表現を求める。式(5)より
$$\frac{\partial^2 y_d}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[Z(\eta)\sin\omega t\right] = -\omega^2 Z(\eta)\sin\omega t$$
$$\therefore \left|\left[\frac{\partial^2 y_d}{\partial t^2}\right]_{\eta=\xi}\right| = \left|-\omega^2 Z(\xi)\sin\omega t\right| \leq \omega^2 Z(\xi) = \frac{\lambda^4 EI}{\rho\ell^4} Z(\xi)$$
したがって、式(3)は次式となる。
$$Z(\xi)\frac{\lambda^4 EI}{\rho\ell^4} \leq g \qquad \therefore Z(\xi) \leq \lambda^4 \frac{\rho g \ell^4}{EI} = \lambda^4 \frac{\overline{W}\ell^3}{EI} = \frac{\lambda^4}{\mu}\frac{P\ell^3}{EI} \qquad (21)$$
ただし、$\overline{W}$は梁の全重量である。式(21)は、接触振動が成立するための条件である。ここで、単純梁の集中荷重Pによる荷重作用点のたわみ $y_s(\xi)$ は次式で与えられる。
$$y_s(\xi) = \frac{P\ell^3}{3EI}\xi^2(1-\xi)^2$$
したがって、単純梁の接触振動成立の条件は、式(21)より
$$\frac{Z(\xi)}{y_s(\xi)} \leq \frac{1}{\mu\lambda^4}\cdot\frac{3}{\xi^2(1-\xi)^2} \qquad (22)$$

7．あとがき

載荷梁の自由振動を解析し、固有値を得るための振動数方程式および振動型を与える式を導き、載荷梁の振動型は直交性を有さず、また、考えるような接触振動は、動たわみがある大きさ以下のときに生ずることを知った。もちろんこの場合の荷重は、ただ梁上に置かれているだけであって、なんらかの方法で荷重が梁に据え付けられている状態であれば、動たわみの大きさに制限なく、ここで得た式が適用できることはいうまでもない。なお、算例に関しては、紙面の都合上、当日発表する。

（参考文献）
1. 日本鋼構造協会編「建築物の動的解析」彰国社
2. 武田晋一郎「実用ラプラス変換」森北出版
3. 望月直文「偏微分方程式」東京電機大学出版部