

九州大学 正員 山崎徳也

正員 ○彦坂 照

1. 緒言

鋼桁や鋼格子桁と上部のコンクリートスラブとを結合した合成桁や合成格子桁は、良好な設計がなされれば普通のプレートガーダーに比較して30%程度に断面を減少することができ、極めて経済的な構造であることは周知のことである。合成桁はコンクリートのクリープ、乾燥収縮の影響を受け、持続荷重によるコンクリートおよび鋼桁の応力が時間的に変化するが、これらの影響を無視して許容応力度に余裕をもたらせる設計法は不経済であり、当然これらの厳密な考慮が必要である。

合成桁の設計は、通常示方書の規定にしたがってコンクリートスラブの協力幅（または有効幅）を求める单一軸として計算を行うが、主桁、横桁およびスラブを一体として解析すれば部材の振り剛性と荷重の横方向分配が考慮されるゆえ、より厳密かつ経済的設計が可能となる。この場合のクリープはもはや単軸クリープではなく、スラブの二次元クリープとして解析すべきことは言うまでもない。

本研究は、かかる見地から合成桁橋と鋼桁とスラブの一体構造を見なし、二次元クリープ理論を適用した解析手法を提示せんとするものである。なお乾燥収縮の影響は別途考慮することとして本論ではひとまず無視し、またコンクリートの弾性係数は時間的に変化しないものとする。コンクリートの二次元クリープ理論について特に説明を加えない記号の意味は文献(1)を参照されたい。

2. 曲げの基礎微分方程式

図-1のごとく橋長 a 、幅員 b の等断面合成桁橋を考え、コンクリートスラブの厚さの中央面内でそれぞれ橋長、幅員方向に直交軸 x 、 y を、またこれらに垂直下方に z 軸を設ける。スラブの厚さを t 、鋼桁は x 、 y 軸に平行に配置されているものとしてそれぞれの高さを a_{sx} 、 a_{sy} とし、スラブの単位幅当たりの鋼桁の断面積を A_{sx} 、 A_{sy} とすれば、例えば x 軸に垂直な単位幅についての置換断面が図-2で表わされる。ここに、 η はコンクリート断面の重心、 η_s は鋼材とコンクリートの弾性係数比 E_s/E_c を用いてコンクリート断面積を鋼材とそれに置換してえられる等価断面積の重心であり、 a_{sx} は η_s と η の距離を表す。 y 軸に垂直な単位幅についても同様に考えて a_{sy} 、 A_{sy} が求められる。

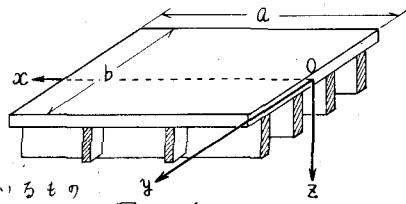


図-1

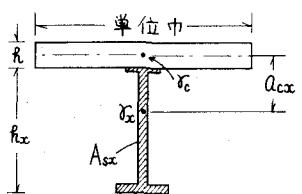


図-2

いまコンクリートの材令 t_0 で載荷を開始するものとすれば、任意時刻 t におけるコンクリートの応力-ひずみ関係が文献(1)より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cx}(t) &= \sigma_{cx}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ \ddot{\epsilon}_{cx}(t') + \nu \dot{\epsilon}_{cy}(t') + (\ddot{\epsilon}_{cy}(t') + \nu \dot{\epsilon}_{cx}(t')) \} e^{q(t')} dt' \\ \sigma_{cy}(t) &= \sigma_{cy}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ \ddot{\epsilon}_{cy}(t') + \nu \dot{\epsilon}_{cx}(t') + (\ddot{\epsilon}_{cx}(t') + \nu \dot{\epsilon}_{cy}(t')) \} e^{q(t')} dt' \\ \tau_{cxy}(t) &= \tau_{cxy}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{E_c}{1-(1+\nu)} \{ \ddot{\epsilon}_{cxy}(t') + \nu \dot{\epsilon}_{cxy}(t') \} e^{q(t')} dt' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

また時刻 t における任意点のたわみを $w(t)$ とし平面保持の仮定を用ひれば、式(1)のスラブのひずみおよび鋼析の曲げ応力 $\sigma_{sx}(t)$, $\sigma_{sy}(t)$ が次式で表わされる。

$$\varepsilon_{xx}(t) = (a_{xx} - z) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy}(t) = (a_{yy} - z) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy}(t) = (a_{xx} + a_{yy} - 2z) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

$$\sigma_{sx}(t) = E_s (a_{xx} - z) \frac{\partial^3 w(t)}{\partial x^3}, \quad \sigma_{sy}(t) = E_s (a_{yy} - z) \frac{\partial^3 w(t)}{\partial y^3} \quad (3)$$

式(1), (2), (3)を用いて基準面 $Z = 0$ に関するモーメントの釣合条件式を立てば、 x および y 軸に垂直な単位幅当りの曲げモーメントが次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_x(t) &= \int_{A_{sx}} \sigma_{sx}(t) Z dA_{sx} + \int_{A/2}^{h/2} \sigma_{sx}(t) Z dz \\ &= -D_{sx} \frac{\partial^3 w(t)}{\partial x^3} - D_c \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial y^2} \right\} - D_c \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^2} - r E_c \varphi(t) \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} \right\} \right] \int_t^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \\ &\quad - D_c \left[\int_t^t \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^2} \right] e^{-\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ M_y(t) &= \int_{A_{sy}} \sigma_{sy}(t) Z dA_{sy} + \int_{A/2}^{h/2} \sigma_{sy}(t) Z dz \\ &= -D_{sy} \frac{\partial^3 w(t)}{\partial y^3} - D_c \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}(t)}{\partial x^2} \right\} - D_c \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2} - r E_c \varphi(t) \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \right\} \right] \int_t^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \\ &\quad - D_c \left[\int_t^t \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2} \right] e^{-\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ \therefore \therefore \quad D_c &= \frac{E_s h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{sx} = \int_{A_{sx}} E_s (z^2 - a_{xx} z) dA_{sx}, \quad D_{sy} = \int_{A_{sy}} E_s (z^2 - a_{yy} z) dA_{sy}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

次に鋼析に対する St. Venant の振り理論を用ひれば、同じく x および y 軸に垂直な単位幅当りの振りモーメントが次式でえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xy}(t) &= G J_{xy} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} - \int_{A/2}^{h/2} \gamma_{xy}(t) Z dz \\ &= G J_{xy} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} + (1-\nu) D_c \frac{\partial^3 w(t)}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu) D_c \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x \partial y} - r E_c \varphi(t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} \right\} \int_t^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \\ &\quad + (1-\nu) D_c \left[\int_t^t \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x \partial y} \right] e^{-\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ M_{yx}(t) &= -G J_{xy} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} - (1-\nu) D_c \frac{\partial^3 w(t)}{\partial y \partial x} - (1-\nu) D_c \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y \partial x} - r E_c \varphi(t) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y \partial x} \right\} \int_t^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \\ &\quad - (1-\nu) D_c \left[\int_t^t \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y \partial x} + r \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y \partial x} \right] e^{-\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに G : 鋼材のせん断弾性係数, J_{sx} , J_{sy} : 単位幅当りの鋼析の振り剛性

x 方向の断面力と荷重強度 $g(x, y)$ の釣合条件より次式が成立する。

$$\frac{\partial M_x(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y(t)}{\partial y^2} - \frac{\partial M_{xy}(t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yx}(t)}{\partial y \partial x} = -g(x, y)$$

上式に式(4), (5)を代入すれば二次元フリーリードを考慮した合成桁構りたわみ曲面 $w(t)$ の方程式が導かれ、途中の演算を省略して結果のみを示せば次のとくである。

$$\left. \begin{aligned} D_{sx} \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + G (J_{sx} + J_{sy}) \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_c \left\{ \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \\ + D_c \left[\int_t^t \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + r \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] e^{-\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ + D_c \left[\frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 \ddot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} - r E_c \varphi(t) \left\{ \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \right] \int_t^t e^{-\eta(\tau)} d\tau = g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)の両辺を t で 2 回微分して変形すれば次の式(7)の微分方程式がえられ、 $t = t_1$ における初期条件式が式(8)で与えられる。

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + 2 \beta_3 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + r \left\{ \beta_1 + D_{sx} E_c \varphi(t) \right\} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + r \left\{ \beta_2 + D_{sy} E_c \varphi(t) \right\} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + r \left\{ 2 \beta_3 + G (J_{sx} + J_{sy}) E_c \varphi(t) \right\} \frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (7)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + 2 \beta_3 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} = g(x, y) \quad (8)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + 2 \beta_3 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} = r E_c \varphi(t) D_c \left\{ \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}$$

$$\text{ここに } \beta_1 = D_{sx} + D_s, \quad \beta_2 = D_{sy} + D_c, \quad \beta_3 = \frac{1}{2} G(J_{sx} + J_{sy}) + D_c$$

結局、式(6)の方程式を解くことは、式(8) (= 5') 与えられる初期条件のもとで式(7)の微分方程式を解くことと同じである。

3. たわみおよび応力算定式

ここに取り扱う図-1の合成桁橋は $x=0$ および $x=a$ において単純支持されるものとすれば、その境界条件が次式で与えられる。

$$x=0, \quad a \text{ において } w(t)=0, \quad M_x(t)=0. \quad (9)$$

式(7)の微分方程式は $\beta_3^2 - \beta_1 \beta_2$ の正負により異なる解をもつが、合成桁橋においては常に $\beta_3^2 - \beta_1 \beta_2 < 0$ が成立するゆえ、式(8)の初期条件と式(9)の境界条件を満足する次の解のみを考えれば十分である。

$$w(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + (1-\lambda_m) r E_c \varphi(t) \int_{t_1}^t e^{-r(t-t')} [1 + \lambda_m E_c \varphi(t')] dt' \right\} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (10)$$

$$\text{ここに } f_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} y + A_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y + B_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y$$

$$A_{mn} = \frac{\frac{4}{\pi} \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y dx dy}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} \beta_1 + \frac{n^2}{a^2} \beta_2 + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2} \beta_3 \right)}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)}$$

A_m, B_m, C_m および D_m は $y = \pm \frac{a}{2}$ における境界条件より定まる積分定数。

$$\lambda_m = \frac{D_{sy} \frac{df_m}{dy} - G(J_{sx} + J_{sy}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{df_m}{dy} + D_{sx} \frac{m^2 \pi^4}{a^2} f_m}{B_s \frac{df_m}{dy} - 2 \beta_2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{df_m}{dy} + \beta_1 \frac{m^2 \pi^4}{a^2} f_m}$$

式(10)を用いて式(2)の各ひずみを算定のうえ、これらを式(11)に代入すればコンクリートスラブの応力が、また式(10)を式(3)に代入すれば鋼桁の応力がそれぞれ求められる。例として、スラブの上縁 ($z = -\frac{a}{2}$) における x 方向応力および鋼主桁の下縁 ($z = \frac{a}{2} + h_s$) 応力算定式を求めれば、それぞれ次のようにある。

$$\left. O_{sx}(t) \right|_{z=-\frac{a}{2}} = -\frac{E_c}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - r \lambda_m E_c \varphi(t) \int_{t_1}^t e^{-r(t-t')} [1 + \lambda_m E_c \varphi(t')] dt' \right\} \left\{ \left(A_{sx} + \frac{B_s}{2} \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m(y) - \left(A_{sy} + \frac{B_s}{2} \right) \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (11)$$

$$\left. O_{sx}(t) \right|_{z=\frac{a}{2}+h_s} = E_s \left(\frac{h_s}{2} + h_s - A_{sx} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + (1-\lambda_m) r E_c \varphi(t) \int_{t_1}^t e^{-r(t-t')} [1 + \lambda_m E_c \varphi(t')] dt' \right\} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

式(10)、(11)において $t = t_1$ と置けば、フリードモードを考慮しない場合の合成桁のたわみおよび応力がえられ、フリードモードを考慮した場合は、これらを初期値として $w(t), O_{sx}(t)$ は単調増加関数、 $O_{sx}(t)$ は単調減少関数となることが、上記2式から了解される。

4. 計算例

橋長 $a = 24 m$ 、幅員 $b = 10 m$ で図-3のごとき主桁断面をもつ合成桁橋が、満載等分布持続荷重 $R_b = 1 t/m$ を受けけるものとして、たわみおよび応力の二次元フリードモード解析を行なうこととする。 $y = \pm \frac{a}{2}$ における境界条件を

$$\begin{aligned} \beta_2 \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} + D_s \frac{\partial^3 w(t)}{\partial x^2} &= 0 \\ \beta_2 \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^3} + (2-\nu) D_s \frac{\partial^3 w(t)}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

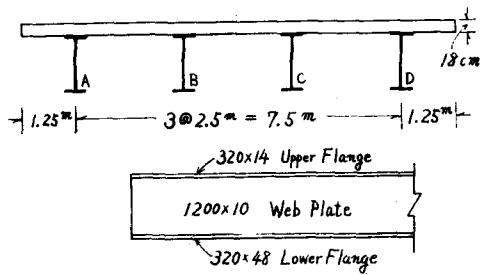


図-3

で与え、変形の対称性を考慮すれば、 $f_m(y)$ が次のとく簡単になる。

$$f_m(y) = \frac{48a^4}{\beta_1 \pi^5 m^5} \left(1 + A_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y + D_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sin k_2 \frac{m\pi}{a} y \right)$$

$$\text{ただし } A_m = \frac{\beta_1 D_c}{J} \left[\left\{ \beta_1 (\beta_1^2 - 3\beta_2^2) - (2-\nu) D_c \right\} k_1 \cosh k_1 y_{lm} \sinh k_2 y_{lm} + \left\{ \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) - (2-\nu) D_c \right\} k_2 \sinh k_1 y_{lm} \cos k_2 y_{lm} \right], \quad \alpha_m = \frac{m\pi i b}{2a}$$

$$D_m = \frac{\beta_1 D_c}{J} \left[\left\{ \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) - (2-\nu) D_c \right\} k_2 \cosh k_1 y_{lm} \sinh k_2 y_{lm} - \left\{ \beta_1 (\beta_1^2 - 3\beta_2^2) - (2-\nu) D_c \right\} k_1 \sinh k_1 y_{lm} \cos k_2 y_{lm} \right].$$

$$S = \left[\left\{ \beta_1 (\beta_1^2 + \beta_2^2) - (2-\nu) D_c \right\} k_1 \cosh k_1 y_{lm} \sinh k_2 y_{lm} + \left\{ \beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) + (2-\nu) D_c \right\} k_2 \cosh k_1 y_{lm} \sinh k_2 y_{lm} \right].$$

$E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $G = 0.81 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.15$ として横筋はないものとすれば、計算に必要な断面諸量は次の値をとる。 $\beta_1 = 1.973 \times 10^{10} \text{ kg/cm}$, $\beta_2 = D_c = 1.044 \times 10^8 \text{ kg/cm}$, $\beta_3 = 1.064 \times 10^8 \text{ kg/cm}$

クリープ関数は文献(1)と同じ Arutyunyan の式を用いることとする。すなわち、

$$\delta = 3.04 \times 10^{-2}, \quad \varphi(t) = 2.94 \times 10^{-6}/t + 5.08 \times 10^{-5}$$

始めにクリープの影響を無視して弾性計算を行い、桁A、Bのスパン中央点におけるたわみ w 、鋼桁の下縁応力(σ_{sx})_{max}およびコンクリートスラブの上縁応力(σ_{cx})_{max}を算定すれば次の結果を得る。

$$\text{桁Aについて: } w = 2.196 \text{ cm}, \quad (\sigma_{sx})_{max} = 746.4 \text{ kg/cm}^2, \quad (\sigma_{cx})_{max} = -36.9 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{桁Bについて: } w = 2.182 \text{ cm}, \quad (\sigma_{sx})_{max} = 741.7 \text{ kg/cm}^2, \quad (\sigma_{cx})_{max} = -36.8 \text{ kg/cm}^2$$

次に載荷開始時のコンクリートの材令を $t_i =$

14日、21日、28日にして、上記たわみおよび応力のクリープによる変化を調べてみる。

表-1はたわみの時間的变化をまとめたもので、(i)たわみはほぼ一定値を保ち、クリープによる増加は僅か0.4%に過ぎない。(ii)コンクリートの材令が遅いも、たわみにはほとんど影響しない。この点を認めることができる。

表-1 単位 cm

t	鋼桁 A			鋼桁 B		
	$t_i=14$ 日	$t_i=21$ 日	$t_i=28$ 日	$t_i=14$ 日	$t_i=21$ 日	$t_i=28$ 日
14	2.196				2.182	
21		2.196				2.182
28	2.202	2.199	2.196	2.188	2.186	2.182
60	2.204	2.204	2.203	2.191	2.190	2.190
90	2.205	2.204	2.203	2.191	2.191	2.190
180	2.205	2.204	2.204	2.191	2.191	2.190

また $(\sigma_{sx})_{max}$ および $(\sigma_{cx})_{max}$ の時間的变化をプロットすれば図-

4のとくである。 $(\sigma_{sx})_{max}$ に対するクリープの影響が特に著しく、最終的には初期応力の27%にまで減少することが明らかとなつた。

5. 結語

鋼桁を主、コンクリートスラブを従とする断面をもつ合成桁は、鋼筋コンクリート桁、同スラブおよびPC桁などと異なりたわみおよび鋼桁の応力に及ぼすクリープの影響は極めて小さい。しかし反面コンクリートの応力には大きな影響を与えることが確認された。

等分布荷重以外に、集中荷重や線荷重が作用する場合、あるいは単軸クリープ理論との比較などについて目下研究中であり、これらの結果についても逐次報告の予定である。

[参考文献] (1) 山崎・彦坂：クリープを考慮した鉄筋コンク

リートスラブの解法、第23回土木学会年次学術講演会講演概要(第IV部)，昭和43年10月。

図-4

