

I-2

ラーメンの曲げフリーブ

九州大学 正員 山崎 徳世
長崎大学 正員 西 秀 武

1. 緒言

常温における骨組構造の曲げフリーブは、応力変動が緩慢であるため、瞬間硬化説を用いてもよい。しかし硬化説を用いてもよいけれども同じ結果を与えること、および瞬間硬化説が数式的取扱の上で考へられていることから、一徑剛ばりに関する既往研究の多くは瞬間硬化説を採用してゐる。また、著者らも、瞬間硬化説にもとづいて、均集中荷重と受ける連続ばりの曲げフリーブ解法を提示し¹⁾、アルミニウム等の軽伸材を用いた連続ばり構造では常温でもフリーブたわみの検算が必要であることを指摘した²⁾が、かゝる理論を応用拡張してラーメンの曲げフリーブ解法を提示せんとするものである。

ラーメンの曲げフリーブ解法には、たわみ角-端モーメント関係式が誘導³⁾のうゑ、これを扱う方法と、基本連立方程式にもとづく方法の2法がある。前者は部材毎に曲げ剛性の異なる範囲の連続ばりやラーメンに適用可能であるが、後者は等断面材が一列に直結する部材列を併て連続ばりや一層ラーメンに限定適用される。しかし、後者は未知平衡定数を求めるための連立方程式の数が前者より少なくて済む利点をもつ。以上の点と、いずれの方法も一長一短があり一般に優劣をつけ難いので、本論では2法を併用することとする。なお、解析にあたっては次の諸値を仮定する。

- (1) ラーメンの各部材には集中荷重またはモーメント荷重が作用するものとす。
- (2) ラーメン各部材において、せん断力が0の区間は存在しないものとす。
- (3) 時刻 $t=0$ の静的いすけとして弾性変形にもとづく瞬間いすけを用ゐる。
- (4) 時刻 $t=\infty$ では曲げフリーブの定常状態にあり、かゝるフリーブ則としてガ柔則を用ゐる。

2. たわみ角-端モーメント関係式による解法

図-1に示すごとく、部材ABの中間において集中荷重 $P_1 \sim P_n$ およびモーメント荷重 $M_1 \sim M_n$ が作用するものとせし、これら荷重の作用点と端Aとの距離をそれぞれ $x_1 \sim x_n$ とする。また、端A, B には端モーメント M_{A0}, M_{B0} および支反反力 P_{A0}, P_{B0} が作用するものとす。

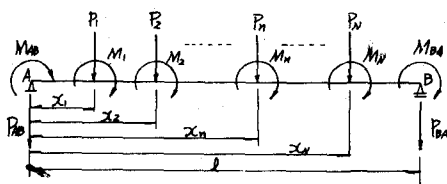


図 - 1.

用するものとす。各力およびモーメントの符号は図中矢印の向きを正とする。

瞬間硬化説にもとづいて、端Aから任意の距離 x にある断面の、任意の時刻 t における上縁の線変位 u およびフリーブいすけ速度 $\dot{u}^{(c)}$ が式(1)のごとく表わされているものと仮定する。

$$u = \frac{Mx}{I_0} \left\{ \frac{I_0}{I_\infty} d_0^{\frac{1}{2}} + \left(d_0 - \frac{I_0}{I_\infty} d_0^{\frac{1}{2}} \right) e^{-\beta t} \right\}, \quad \dot{u}^{(c)} = g K \beta \omega e^{-\beta t} + B \alpha^0, \quad (1)$$

$$\text{こゝに} \quad I_0 = \int_A y^2 dA, \quad I_\infty = \int_A y^{1+\alpha} dA,$$

d_0 : 時刻 $t=0$ のときの断面線維から中立軸までの距離 z , $\int_A y dA = 0$ より算定される。

d_∞ : 時刻 $t=\infty$ のときの断面線維から中立軸までの距離 z , $\int_A y^{\frac{1}{1+\alpha}} dA = 0$ より算定される。

g, K, B, α, β : 材料の圧縮または引張フリーブ試験によつて決定される材料定数。

Mx : 任意の距離 x における断面の曲げモーメントで、図-1の荷重状態に依つて式(1)のごとく

$$x \text{ である。 } Mx' = \sum_{n=1}^N \{ M_n H_n - P_n H_n (x - x_n) \} + M_{AB} - P_{AB} x \quad (H_n: \text{unit step function}) \quad (2)$$

式(1)の仮定と平面保線法の則から、部材AB任意の時刻 \$t\$ におけるたわみ曲線式 \$y\$ および \$t\$ の付角曲線式 \$dy/dx\$ が次のごとく導定される。

$$y = -\text{sign}(Mx') \frac{Mx}{Qx^2} + (C + \sum_{n=1}^N \frac{P_n \overline{M}_n H_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n}) x + C' - \sum_{n=1}^N \frac{P_n H_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \left\{ -\text{sign}(Mx') \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \cdot M_n + \overline{M}_n x_n \right\} \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\overline{M}_x}{Qx} + C + \sum_{n=1}^N \frac{P_n \overline{M}_n H_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \quad (4)$$

$$x > 1: \quad Mx = \frac{K_1}{2} |Mx'|^2 + \frac{K_2}{\alpha+1} |Mx'|^{\alpha+1} + \frac{K_3}{\beta+1} |Mx'|^{\beta+1}$$

$$Mx = \frac{K_1}{6} |Mx'|^3 + \frac{K_2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |Mx'|^{\alpha+2} + \frac{K_3}{(\beta+1)(\beta+2)} |Mx'|^{\beta+2}$$

$$K_1 = \frac{d_0}{E I_0 d}, \quad K_2 = \frac{K R_1^\alpha}{R_2 (\alpha+1) I_0^\alpha d} \left\{ (1+R_2)^{\alpha+1} - (1+R_2 e^{-\beta t})^{\alpha+1} \right\},$$

$$K_3 = \frac{B R_1^\beta}{I_0^\beta d} \left\{ t + \frac{R_2 \beta}{\delta} (1 - e^{-\beta t}) \right\}, \quad R_1 = x d \alpha, \quad R_2 = \frac{d_0}{R_1} - 1, \quad x = \frac{I_0}{I_n}$$

$$Qx = -\sum_{n=1}^N P_n H_n - P_{AB}, \quad E: \text{弾性係数}, \quad C, C': \text{積分定数}.$$

\$d\$: 時刻 \$t\$ のときの断面撓線から中立軸までの距離 \$z\$, 近似的に次式で与えられる。

$$d = d_{00} + (d_0 - d_{00}) e^{-\beta t}$$

\$M_n, \overline{M}_n, Q_n, Mx'\$ に \$x = x_n\$ を代入して与えられる諸値を求められ得る。

図-1の部材ABにおいて、支座A, Bから一般に垂直変位 \$d_{AB}, d_{BA}\$ を起すものとする。積分定数 \$C\$ および \$C'\$ が次のごとく与えられる。

$$C = \frac{1}{l} (d_{BA} - d_{AB}) - \text{sign}(M_{AB}) \cdot \frac{M_{AB}}{l P_{AB}^2} - \text{sign}(M_{BA}) \cdot \frac{M_{BA}}{l P_{BA}^2} - \sum_{n=1}^N \frac{P_n \overline{M}_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \\ + \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \left\{ -\text{sign}(Mx') \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \cdot M_n + \overline{M}_n x_n \right\} \frac{1}{l}$$

$$C' = d_{AB} + \text{sign}(M_{AB}) \cdot \frac{M_{AB}}{P_{AB}}$$

上記2式を式(3), (4)に代入する。導定整理すれば、部材ABの \$t\$ の付角曲線式 \$y\$ および \$t\$ の付角曲線式 \$dy/dx\$ は次のごとく求むられる。

$$y = -\text{sign}(Mx') \frac{Mx}{Qx^2} + \text{sign}(M_{AB}) \cdot \frac{M_{AB}}{P_{AB}^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \text{sign}(M_{BA}) \cdot \frac{M_{BA}}{P_{BA}^2} \frac{x}{l} \\ - \sum_{n=1}^N \frac{P_n \overline{M}_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} (1 - H_n) x + \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \left\{ -\text{sign}(Mx') \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \cdot M_n + \overline{M}_n x_n \right\} \left(\frac{x}{l} - H_n \right) + d_{AB} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + d_{BA} \frac{x}{l} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\overline{M}_x}{Qx} - \text{sign}(M_{AB}) \cdot \frac{M_{AB}}{l P_{AB}^2} - \text{sign}(M_{BA}) \cdot \frac{M_{BA}}{l P_{BA}^2} - \sum_{n=1}^N \frac{P_n \overline{M}_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} (1 - H_n) \\ + \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \left\{ -\text{sign}(Mx') \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \cdot \frac{M_n}{l} + \overline{M}_n \frac{x_n}{l} \right\} + \frac{1}{l} (d_{BA} - d_{AB}) \quad (6)$$

部材両端A, Bのたわみ角を \$Q_{AB}, Q_{BA}\$ とすれば、これらの式(6)から直ちに次のごとく与えられる。

$$Q_{AB} = \frac{1}{P_{AB}} \left\{ \overline{M}_{AB} - \text{sign}(M_{AB}) \cdot \frac{M_{AB}}{l P_{AB}^2} \right\} - \text{sign}(M_{BA}) \cdot \frac{M_{BA}}{l P_{BA}^2} \\ - \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \left\{ \text{sign}(Mx') \cdot \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \cdot \frac{M_n}{l} + \overline{M}_n \left(1 - \frac{x_n}{l} \right) \right\} + \frac{1}{l} (d_{BA} - d_{AB}) \quad (7)$$

$$Q_{BA} = \frac{1}{P_{BA}} \left\{ -\overline{M}_{BA} - \text{sign}(M_{BA}) \cdot \frac{M_{BA}}{l P_{BA}^2} \right\} - \text{sign}(M_{AB}) \cdot \frac{M_{AB}}{l P_{AB}^2} \\ - \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \left\{ \text{sign}(Mx') \cdot \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1} \cdot Q_n} \cdot \frac{M_n}{l} - \overline{M}_n \frac{x_n}{l} \right\} + \frac{1}{l} (d_{BA} - d_{AB}) \quad (8)$$

すた、両端A, Bのせん断力は次のごとくである。

$$P_{AB} = \frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA}) + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{M_n}{l} - P_n \left(1 - \frac{x_n}{l}\right) \right\}, \quad P_{BA} = -\frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA}) - \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{M_n}{l} + P_n \frac{x_n}{l} \right\} \quad (9)$$

以上、式(7), (8)および式(9)が本法の基本方程式である。

式(7), (8)に示すたわみ角-端モーメント関係式は未知不特定モーメント M_{AB}, M_{BA} の一次式で表わしゆえ、既往の解析理論論におけるごとく、変形量を未知数とするたわみ角式を誘導のうたうラメン解析を行うことは不可能で、端モーメントを直接未知数とする有力法によらなければならぬ。すなわち

ラメンの各節点におけるモーメントの釣合条件式と各部材の端たわみ角の変形条件式をたて、また、式(9)を用いて2方方程式を求め、さらに、境界条件式を加えてえられる連立方程式を試算による収束計算によって解かなくてはならぬこととなる。

3. 基本連立方程式による解法

図-2に示すごとく一層ラメンに於いて考える。

はり部材列ABおよび柱に集荷面をとおすモーメント荷重が作用したとき、部材列ABは柱の頭部から上面反力および反力モーメントの作用を受けるが、これらの諸力をも部材列ABに作用する外力とみなし、全2つの

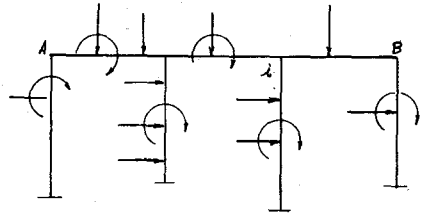


図 - 2

力に対して端A側から順次サフィックス0, 1, 2, ..., n, ..., N, N+1を附せば、図-2の部材列ABは図-1に示す一径間はりABと同じこととなり、単にサフィックスABの代りにサフィックス0を、また、サフィックスBAの代りにサフィックスN+1を用うればよい。したがって、本題の部材列ABのたわみ角曲線およびたわみ角曲線の各式排式(5)および式(6)で表わされる。

他方、柱と部材列との結合面では、部材列ABのたわみ角と柱頭部の垂直変位が等しくなければならぬこと、および部材列ABのたわみ角と柱頭回転角が等しくなければならぬことから次のごとく一連の変形条件式をうる。

$$y(x=x_i) = d_i \quad (i = I, II, \dots, Y) \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dx}(x=x_i) = -\theta_{BA}^{ci} \quad (i = 0, I, II, \dots, Y, N+1)$$

ここに d_i : 柱iの垂直変位で下向きを正とする。

θ_{BA}^{ci} : 柱iの柱頭回転角で時計方向を正とする。

式(10)に式(5), (6)を代入し、さらに θ_{BA}^{ci} とした式(8)を用うれば、部材列ABの基本連立方程式が求まり、次のごとくえられる。

$$\begin{aligned} & -\text{sign}(M_0') \frac{M_{xi}}{\theta_{xi}^2} + \text{sign}(M_0) \frac{M_0}{P_0^2} (1 - \frac{x_i}{l}) - \text{sign}(M_{N+1}) \frac{M_{N+1}}{P_{N+1}^2} \frac{x_i}{l} \\ & - \sum_{n=1}^N \frac{P_n \bar{M}_n}{\theta_{n+1} \theta_n} (1 - H_n) x_i + \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{\theta_{n+1} \theta_n} \left\{ -\text{sign}(M_n') \frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{\theta_{n+1} \theta_n} M_n + \bar{M}_n x_n \right\} \left(\frac{x_i}{l} - H_n \right) \\ & = d_i - d_0 \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) - d_{N+1} \frac{x_i}{l} \quad (i = I, II, \dots, Y) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{M}_{xi}}{\theta_{xi}} - \text{sign}(M_0) \frac{M_0}{P_0^2} \frac{1}{l} - \text{sign}(M_{N+1}) \frac{M_{N+1}}{P_{N+1}^2} \frac{1}{l} - \sum_{n=1}^N \frac{P_n \bar{M}_n}{\theta_{n+1} \theta_n} (1 - H_n) \\ & + \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{\theta_{n+1} \theta_n} \left\{ -\text{sign}(M_n') \frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{\theta_{n+1} \theta_n} \frac{1}{l} + \frac{x_n}{l} \bar{M}_n \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{P_{BA}} \left\{ -\overline{M}_{BA}^{ci} - \text{sign}(M_{BA}^{ci}) \frac{M_{BA}^{ci}}{L_i P_{BA}^{ci}} \right\} + \text{sign}(M_{AB}^{ci}) \frac{M_{AB}^{ci}}{L_i (P_{AB}^{ci})^2} \\ + \sum_{n=1}^{N_i} \frac{P_{n2}^{ci}}{Q_{n1}^{ci} Q_{n2}^{ci}} \left\{ \text{sign}(M_{n2}^{ci}) \frac{Q_{n1}^{ci} + Q_{n2}^{ci}}{Q_{n1}^{ci} - Q_{n2}^{ci}} \frac{M_{n2}^{ci}}{L_i} - \overline{M}_{n2}^{ci} \frac{x_{n2}}{L_i} \right\} + \frac{1}{L_i} (d_{n1}^{ci} - d_{n2}^{ci}) \quad (2)$$

($i = 0, I, II, \dots, Y, N+1$)

節受移動のない連続はりおよびラーメンに式(1), (2)を、また節受移動のあるラーメンに式(1), (2)と層分式をそれぞれ連立に解けば、未知静定量たる柱頭部の垂直反力、反力モーメントおよび変位量が算出され、本題の連続はりおよびラーメンが解けることになる。

4. 計算例

例-3に示すラーメンにおいて、各部材がアルミニウム合金で作られており、その材料定数が次のとおり諸値で与えられるものとする。

$$E = 1.37 \times 10^6, K = 0.820 \times 10^{-7}, \alpha = \beta = 1.18, \gamma = 0.0128, B = 6.5 \times 10^{-12},$$

したがって、はり部材中央断面のたわみは $\delta = 500$ 及び 5.4% , $\delta = 1000$ 及び 6.2% といふ増加する。

5. 結語

本論文はラーメンの曲げフリープに於いて、たわみ角-端モーメント関係式による解法および基本連立方程式による解法の2法を提示したのであるが、いずれの方法もその数値計算は試算による収束計算となり、演算経路の上で殊に差異はない。なお、 $\delta = 0$ について既に既述の繰形理論によりよく解法を用いる、演算経路が著しく短縮される。

参考文献

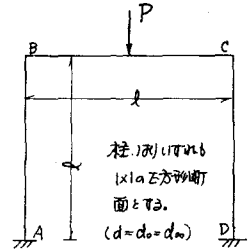
1) 例2)を

Pao, Y. H. and Marin, J.: Deflection and Stresses in Beams Subjected to Bending and Creep.
J. Appl. Mech., vol. 19, No. 4, 1952-12

Suzawa, Y. and Yamamoto, K.: Creep of Metals Under Bending or Twisting Moment.
Bull. Tokyo Inst. Technology Ser. B, No. 2, 1951 70E

2) 山本・木暮: 連続はりの曲げフリープ. 第2回工務院技術講習会, No. 10.

3) Marin, J. and Zwisler, L. E.: Creep of Aluminum Subjected to Bending at Normal Temperatures
ASTM. Proc., vol. 40, 1940



例-3