

九州大学 正員 山崎 徳也

〃 〃 〃 太田 俊昭

1. 序言

軽量構造用材として利用されるアルミニウム材は、鋼材に比べて変形が大きいため、その厳密な構造解析は当然有限変形理論¹⁾に依らなければならない。

本研究は、まず 塑性域、特にひずみ硬化域におけるアルミニウムの応力-ひずみ曲線を任意の n 次関数で一般表示し、これに基づいてアルミニウムばりの有限変形に対する補正エネルギーの算定とその式表現の簡易化を図り、次いで変分原理を用いて各種形状のアルミニウム片持ばりの有限変形挙動を解明せんとするものである。

2. 理論式の誘導

アルミニウムの応力-ひずみ曲線を図-1に示すごとく、弾性域では Hooke の法則 $\sigma = E\varepsilon$ に従う直線 OA で、ひずみ硬化域も含めた塑性域では、任意の n 次関数 $\sigma^* = E\varepsilon_y(\varepsilon/\varepsilon_y)^n$ で与えられる曲線 AB で定義すれば、断面に生じる曲げモーメント M は、図-2より次の一般式で求められる。

$$M = \int_{h_2}^0 \sigma^e y dA + \int_{h_2}^0 \sigma^* y dA + \int_0^{h_1} \sigma^* y dA \quad \text{--- (1)}$$

ただし

$\sigma^e = E\varepsilon$: 弾性域の応力, $\sigma^* = E\varepsilon_y(\varepsilon/\varepsilon_y)^n$: 塑性域の応力,

E : ヤング率, ε_y : 降伏ひずみ, σ_y : 降伏応力,

n : 正の無次元定数, dA : 微小面積,

ε_u : 極限ひずみ, $\sigma_u = E\varepsilon_y(\varepsilon/\varepsilon_y)^n$: 極限応力,

η_1, η_2 : 弾性域の深さ。

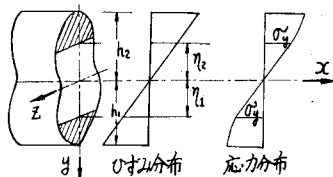


図-1

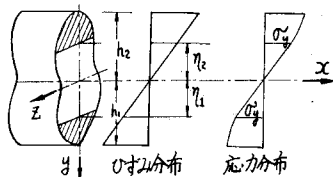


図-2

いま、断面を $2h \times b$ の矩形と仮定すれば、式(1)は曲率 ϕ によって次のごとく表わされる。

i) 弾性応力状態 ($|M| < |M_y|$) ; $M = M_y \phi$, --- (2)

ii) 弾塑性応力状態 ($|M_y| \leq |M| \leq |M_u|$) ;

$$M = M_y \left\{ \frac{(1-n)}{(2n+1)} \phi^2 + \frac{3n}{(3n+1)} \phi^{\frac{1}{n}} \right\} \quad \text{--- (3)}$$

ただし $\phi = \phi/\phi_y$, $\varepsilon_y = \phi \eta = \phi_y h$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $h_1 = h_2 = h$, $M_y = E\phi_y h^3/3$: 降伏曲げモーメント,

ϕ_y : 降伏時の曲率。

次に、式(2)(3)の曲げモーメントによって単位長さ当りの断面に貯えられる曲げ補正エネルギー²⁾

$C_0 = \int \phi dM$ は

i) 弾性応力状態 ; $C_0 = \frac{M_y^2}{2EI} \phi^2$, --- (4)

ii) 弾塑性応力状態 ; $C_0 = \frac{M_y}{EI} \left(\phi M - \int M d\phi \right) + \frac{M_y^2}{2EI}$
 $= \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ 1 + \frac{4(1-n)}{(1+2n)} (\phi^2 - 1) + \frac{2(1-n)}{(1+n)(2n+1)} (\phi^{\frac{1}{n}+1} - 1) \right\}$ --- (5)

ただし I : 断面2次モーメント。

ここで解析の簡易化を目して、式(3)のMを図-3に示すごとく1本のM/M_y-φ近似直線²⁾で置換すれば、式(4), (5)は次のごとく簡単なM/M_yの2次式で表わすことができる。

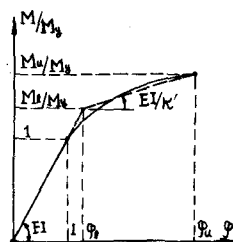


図-3

i) 弾性応力状態 ($|m| < |m_e|$) ; $C_0 = \frac{M_y^2}{2EI} m^2$, ----- (6)

ii) 弾塑性応力状態 ($|m_e| \leq |m| \leq |m_u|$) ; $C_0 = \frac{M_y^2}{2EI} \{m^2 + \kappa (m - m_e)^2\}$, ---- (7)

ただし $\kappa = \kappa' - 1$, $m = M/M_y$, $m_e = M_e/M_y$: 無次元化した臨界曲げモーメント。

ここで 未知の M/M_y-φ 近似直線の勾配を示す κ' および臨界曲げモーメント M_e は、エネルギー等置条件³⁾ および幾何学的条件によって決定され、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa' &= \frac{\phi_u/\phi_y - \phi_e/\phi_y}{M_u/M_y - M_e/M_y}, \\ \phi_e/\phi_y &= \frac{M_u/M_y \cdot \phi_u/\phi_y - 1 - 2A_1}{\phi_u/\phi_y - M_u/M_y}, \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

ただし $M_u/M_y = (1-n)/(2n+1) \cdot (\phi_u/\phi_y)^2 + 3n(\phi_u/\phi_y)^{2/(3n+1)}$,

$A_1 = 4(1-n) \{ (\phi_u/\phi_y)^{1/(1+2n)} - 1 \} / (1+2n) + 2(1-n) \{ (\phi_u/\phi_y)^{1/(1+n)} - 1 \} / (1+n)(1+2n)$ 。

式(8)中の ϕ_e は平面保持の仮定により $\phi_e/\phi_y = \epsilon_u/\epsilon_y$ で求められるゆえ、結局 アルミニウムの機械的性質である ϵ_u 値および n 値を与えれば、 κ' 値および M_e , M_u 値が算定されることになる。すなわち、式(8)より ϕ_u/ϕ_y を10より30まで5刻みに、 n を2より6まで1刻みに変化させて M_e 値 および M_u , κ' 値を算定すれば表-1 がえられる。

さて、図-4のごとき形状任意の片持ばりを補正エネルギー法によって解析するには、まずこれを適当な数に分割し、各分割部材についてそれぞれ補正エネルギーを算出しなければならない。

すなわち、いま 第 k 番目の分割部材に与えられる補正エネルギーを C_k とすれば、補正エネルギーの定義²⁾より C_k はひすみエネルギー U_k を媒介とした次の式で与えられる。

$$C_k - \int_{\theta_k} (\sum Q_k \Delta_k) ds = U_k \text{----- (9)}$$

ただし Q_k : 分割部材 k に働く一般力、

Δ_k : Q_k に対応する変形成分。

ここに ひすみエネルギー U_k は軸力の影響を一応無視し U_k を単位長さ当りのひすみエネルギーとすれば

$$\left. \begin{aligned} U_k &= \int_0^L U_{0k} ds \\ U_{0k} &= \int M d\phi = M\phi - \int \phi dM \end{aligned} \right\} \text{----- (10)}$$

一方、式(9)の右辺の第1項は、 $\bar{\theta}_k$ および θ_k を初期部材角 および変形後の部材角とすれば図-5より

$$\begin{aligned} \sum Q_k \Delta_k &= M_k(\theta_k - \bar{\theta}_k + \phi ds/2) + (M_k dM_k)(-\theta_k + \bar{\theta}_k + \phi ds/2) \\ &\quad + V_k(\sin \theta_k - \sin \bar{\theta}_k) + H_k(\cos \theta_k - \cos \bar{\theta}_k) \text{----- (11)} \end{aligned}$$

n	ϕ_u/ϕ_y	M_e/M_y	M_u/M_y	κ'
2	10	1.886	3.793	4.256
	15	2.152	4.647	5.150
	20	2.379	5.366	5.898
	25	2.580	6.000	6.556
	30	2.764	6.572	7.151
3	10	1.719	2.767	7.903
	15	1.888	3.170	1.023 ¹⁰
	20	2.026	3.489	1.228 ¹⁰
	25	2.143	3.759	1.415 ¹⁰
	30	2.248	3.995	1.589 ¹⁰
4	10	1.641	2.368	1.151 ¹⁰
	15	1.768	2.623	1.548 ¹⁰
	20	1.868	2.819	1.906 ¹⁰
	25	1.951	2.981	2.238 ¹⁰
	30	2.024	3.120	2.552 ¹⁰
5	10	1.596	2.158	1.497 ¹⁰
	15	1.699	2.342	2.069 ¹⁰
	20	1.778	2.482	2.591 ¹⁰
	25	1.844	2.595	3.081 ¹⁰
	30	1.900	2.692	3.548 ¹⁰
6	10	1.567	2.028	1.826 ¹⁰
	15	1.655	2.173	2.579 ¹⁰
	20	1.721	2.280	3.271 ¹⁰
	25	1.775	2.367	3.926 ¹⁰
	30	1.821	2.440	4.553 ¹⁰

表-1

式(9)に式(10), (11)を代入して整理すれば

$$C_k = \int_k \{ \phi dM - \frac{dM}{ds} (\theta_k - \bar{\theta}_k) + V_k (\sin \theta_k - \sin \bar{\theta}_k) + H_k (\cos \theta_k - \cos \bar{\theta}_k) \} ds \\ = \int_k C_{Bk} ds - (\theta_k - \bar{\theta}_k) \int_k \frac{dM}{ds} ds + (\sin \theta_k - \sin \bar{\theta}_k) \int_k V_k ds + (\cos \theta_k - \cos \bar{\theta}_k) \int_k H_k ds \quad \text{--- (12)}$$

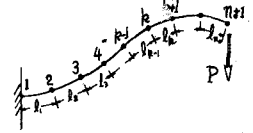


図 - 4

式(12)に式(6), (7)を代入すれば、結局 C_k は次のようになる。

$$C_k = \frac{M_y^2}{2EI} \int_k \{ m^2 + \kappa (m - \bar{m}_k)^2 \} ds - (\theta_k - \bar{\theta}_k) \int_k \frac{dM}{ds} ds + (\sin \theta_k - \sin \bar{\theta}_k) \int_k V_k ds \\ + (\cos \theta_k - \cos \bar{\theta}_k) \int_k H_k ds \quad \text{--- (13)}$$

ただし κ は $|m| < |m_k|$ の場合は零とする。

したがって部材全体の補正エネルギー C_T は

$$C_T = \sum_{k=1}^{n_0} C_k = \sum_{k=1}^{n_0} \left\{ \frac{\lambda M_y^2}{12EI} \{ m_k^2 + (m_k + m_{k+1})^2 + m_{k+1}^2 + \kappa_k m_k^2 + \kappa_{k+1/2} (m_k + m_{k+1})^2 \right. \\ \left. + \kappa_{k+1} m_{k+1}^2 - 2(\kappa_k m_k m_{k+1} + 2\kappa_{k+1/2} (m_k + m_{k+1}) m_{k+1/2} \right. \\ \left. + \kappa_{k+1} m_{k+1} m_{k+1/2}) + \kappa_k m_{k+1}^2 + 4\kappa_{k+1/2} m_{k+1/2}^2 + \kappa_{k+1} m_{k+1}^2 \} \right. \\ \left. - (\theta_k - \bar{\theta}_k) (m_{k+1} - m_k) M_y + \lambda l \{ V_k (\sin \theta_k - \sin \bar{\theta}_k) \right. \\ \left. + H_k (\cos \theta_k - \cos \bar{\theta}_k) \} \right\} \quad \text{--- (14)}$$

図 - 5

ただし添字 $k, k+1$ および $k+1/2$ は、それぞれ分割点 $k, k+1$ およびその中間点を示し、 $l_k = \lambda l$ は分割部材長である。

次に、分割点 k におけるたわみ角の連続条件を求めれば変分原理より次式が成立する。

$$\frac{\partial C_T}{\partial M_k} = 0 \quad (k=1 \sim n_0). \quad \text{--- (15)}$$

式(15)に式(14)を代入して

$$(1 + \kappa_k) m_k + (1 + \kappa_{k+1/2}) (m_k + m_{k+1}) - \kappa_k m_{k+1} - 2\kappa_{k+1/2} m_{k+1/2} + 6(\theta_k - \bar{\theta}_k) / \lambda \omega = 0, \quad (k=1), \\ 2(1 + \kappa_k) m_k + (1 + \kappa_{k+1/2}) (m_k + m_{k+1}) + (1 + \kappa_{k-1/2}) (m_k + m_{k-1}) - 2(\kappa_k m_{k+1} + \kappa_{k+1/2} m_{k+1/2} \\ + \kappa_{k-1/2} m_{k-1/2}) + 6(\theta_k - \bar{\theta}_k - \theta_{k-1} + \bar{\theta}_{k-1}) / \lambda \omega = 0, \quad (k=2 \sim n_0), \quad \text{--- (16)}$$

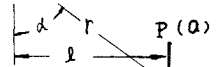
ただし $\omega = \sigma_y l / E h$

また、各分割部材に於て諸力は、次の釣合い式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} dM_k - V_k ds \cos \theta_k &= 0, \\ dV_k &= 0, \end{aligned} \right\} \text{すなわち, } \left. \begin{aligned} m_{k+1} - m_k - V_k \lambda l \cos \theta_k / M_y, \quad (k=1 \sim n_0), \\ V_k &= \Sigma P \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (17)}$$

すなわち、式(16), (17)より未知数 θ_k, m_k が求められ、したがって部材の鉛直たわみ δ_k が次の式で算出される。

$$\delta_k / l = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} \sin \theta_i \quad \text{--- (18)}$$



3. 計算例

以上の考察に基づいて図-6(a),(b)に示すアルミニウム円弧片持はりの解析を行なえば以下のようになる。ただし円弧の中心角を $\alpha = \pi/10$ ラジアンとし、アルミニウムの n および ϕ_k / ϕ_y をそれぞれ $n=2$ および $\phi_k / \phi_y = 10$ と仮定する。

いま、部材を $n_0=5$ 等分すれば、第 k 番目の分割部材の初期部材角 $\bar{\theta}_k$ は、それ図-7より次式で与えられる。

$$\bar{\theta}_k = \tan^{-1} \{ \sin \phi_k k - \sin \phi_k (k-1) \} / \{ \cos \phi_k k - \cos \phi_k (k-1) \}, \quad (k=1 \sim n_0), \quad (19)$$

荷重条件より $V_k = P, (k=1 \sim n_0)$ であり、前記誘導の式(16), (17)および式(18)を併用し、Newton法に基づいて未知数 m_k, θ_k および y_k を求めれば、図-6(a)

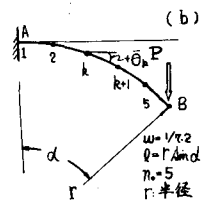


図 - 6

および(b)に対して、それぞれ図-8および図-9の結果をうる。

また 図-10は、 $\bar{\theta}_h = 0$ なる直線材片持ばりに対し、 $\phi_h/\phi_g = 10$ 、 τ/π を2より6まで1割に变化させて求めた荷重-たわみ曲線である。

これらの計算結果より、 $\alpha = \pi/10$ の円弧片持ばり(図-6(b)参照)の崩壊時のモーメント値は、直線材片持ばりのそれに比べて7%減少し、逆にたわみの増加は、直線材片持ばりの約2倍にも達し、部材形状がばりの変形挙動に著しく影響を与えることが判明した。

また、図-10より明らかなように、断面の応力分布を規定する n が、

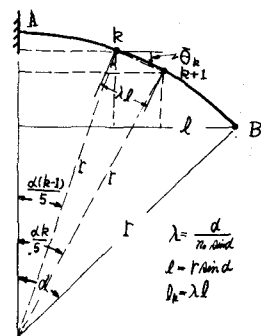


図-7

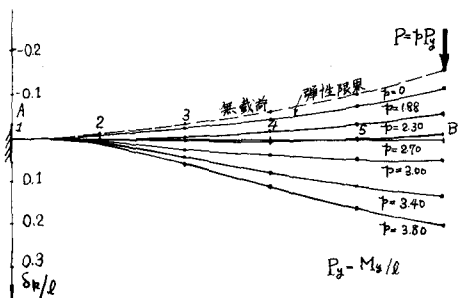


図-8

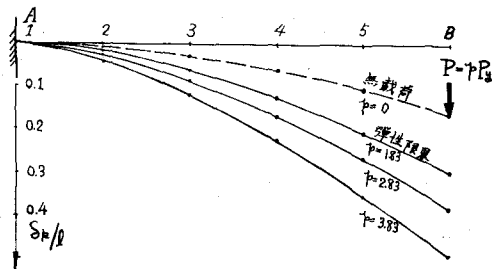


図-9

構造全体の耐荷力を左右する大きな要因の1つであり、したがってかかる解析理論において応力-ひずみ曲線の正確な把握が極めて重要であることが確認された。

4. 結語

本研究は、有限変形理論に基づくアルミニウム片持ばりの弾塑性たわみの解析理論を提示したもので、その特色は、

- (1) 形状任意の部材に適用できること。
- (2) 連続はりおよびラーメンなど各種の骨組構造物に適用でき、その手法に一貫性を有すること。
- (3) 応力-ひずみ曲線が図-1の一般的な非線形関数で与えられており、したがって本理論をアルミニウム材はもとより、鋼、鋼およびコンクリート材などにも広く適用できること、などが挙げられる。

なお 本研究は、文部省科学研究費の援助を受けた、ここに記して謝意を表する。

(参考文献)

- 1) 山崎太田 後藤：有限変形を考慮したばりの弾塑性解析，第3回土木学会年次学術講演会講演概要，昭和43年10月。
- 2) C. Oran：Complementary Energy Concept for Large Deformations，Proceedings of the A.S.C.E., ST.1, February, 1967.
- 3) 山崎太田 石川：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析，土木学会論文集，第134号，昭和41年10月。