V－18

フロック粒子の衝突頻度について

九州大学工学部　正員　○粟谷陽一
〃　学生員　楠田哲也

1．<u>まえがき</u>　流体の運動に伴うフロック粒子の衝突過程を取扱う代表的な理論として，一様剪断流に対するCampの理論と，乱流拡散を基礎とするLevichの理論とを挙げることができよう。両者は理論の前提が全く異るが，緩速攪拌によるフロック粒子の成長の場合のように，粒径が渦のマイクロスケールにくらべて十分小さい場合には，Levichの与えた衝突頻度の式は，常係数の値を除いてはCampと全く同形である。Levichの式の常係数には未知の比例常数βを含むが，この値は通常1に近い値をもつと考えられている。そうすると，一様剪断流と乱流との相違により，約28倍も異る衝突頻度が，同一のエネルギー損失をもつ流れの場に対して与えられることになる。粒子の径が渦のマイクロスケールにくらべて小さいときには，乱れによる衝突もエネルギー損失を伴う流体の変形運動に従って起ると見られるから，Levichの式における常係数には，βの値も含めて問題を残していると思われる。

ともあれ，両理論は，この点を除けば同形の衝突頻度式を与えるが，ともに流体の運動が粒子の存在によって影響を受けることを無視したことは問題であろう。とくに衝突粒子径がかなり異る場合には，小さい粒子は大きい粒子を迂回して流れようとすることは明らかである。このため両理論ともに粒径の異る粒子の衝突頻度が，粒径の等しい場合とくらべて過大に評価されると考えられる。

この報告はCampおよびLevichの理論をもとに，簡単な仮定を用いて上述の考慮に対する修正を試み，粒径の相違による衝突頻度の変化の概略を見ようとしたものである。

2．<u>変形流中の2球の衝突頻度</u>　Campの理論に対する修正を試みるため，まず一様変形流中に1個の球が存在するときのその近傍の流状を求める。一般に，一様変形流は，その変形の主軸を座標軸とする適当な移動直交座標から見れば，(x,y,z)点における流速を

$$\vec{u}=(\alpha x,\ \beta y,\ \gamma z) \tag{1}$$

と表わすことができる。連続の式は

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \tag{2}$$

となる。(1)を回転対称な2つの部分に分けて

$$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2=\left(-\frac{\alpha_1}{2}x,\ \alpha_1 y,\ -\frac{\alpha_1}{2}z\right)+\left(-\frac{\alpha_2}{2}x,\ -\frac{\alpha_2}{2}y,\ \alpha_2 z\right) \tag{3}$$

とおくと

$$\alpha_1=\frac{2}{3}(\beta-\alpha) \qquad \alpha_2=\frac{2}{3}(\gamma-\alpha) \tag{4}$$

となる。慣性を無視し流体の運動がStokesの式に従うものとすれば，座標原点に球をおいたときの流れは，(3)の各項で示される軸対称な変形流れの中心に球が存在する場合の解を重ね合わせて得られる。

回転対称な変形流の中心に半径aの球がある場合を考えて，

$$r\to\infty\ \text{で}\ \vec{u}=\left(\alpha x,\ -\frac{\alpha}{2}y,\ -\frac{\alpha}{2}z\right)\ ;\ r\to a\ \text{で}\ \vec{u}=0 \quad [r^2=x^2+y^2+z^2] \tag{5}$$

の解を求める。円筒座標x,ϖ,φおよび流れ関数ψを用いて，x方向およびϖ方向の流速を

$$u_x=\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi}, \qquad u_\varpi=-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6}$$

とすれば，Stokesの式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \varpi^2}-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varpi}\right)^2\psi=0 \tag{7}$$

となり，(5)を満足する解として

$$\psi=\frac{\alpha}{2}\varpi^2 x\left\{1-\frac{a^3}{2}\frac{5(x^2+\varpi^2)-3a^2}{(x^2+\varpi^2)^{5/2}}\right\} \tag{8}$$

が得られる。(8)を(6)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\alpha x\left\{1-\frac{a^3}{4}\frac{5(x^2+\varpi^2)(2x^2-\varpi^2)-3a^2(2x^2-3\varpi^2)}{(x^2+\varpi^2)^{7/2}}\right\}\\ u_\varpi&=-\frac{\alpha}{2}\varpi\left\{1+\frac{a^3}{2}\frac{5(x^2+\varpi^2)(2x^2-\varpi^2)-3a^2(4x^2-\varpi^2)}{(x^2+\varpi^2)^{7/2}}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

２球が相隣接して流体中を動くときの厳密な解を求めることは困難なので，つぎの２つの仮定によって計算を進める。

a. 小球のみが大球の影響をうけるとする場合　大球（半径 a）の中心を座標原点にとり，小球（半径 b）の中心は(9)に従って運動するとすれば，両球の中心距離を r とするとき，中心線方向の速度成分は，球座標 r, θ, φ を用いれば(9)より

$$u_r=\frac{\alpha r}{2}\left(1-\frac{5}{2}\frac{a^3}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{a^5}{r^5}\right)(2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \tag{10}$$

となる。一般の変形流れに対し(3)のような２つの軸対称流れに対する解を重ね合わせれば

$$u_r=\frac{r}{2}\left(1-\frac{5}{2}\frac{a^3}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{a^5}{r^5}\right)\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1\right)+\frac{3}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right\} \tag{11}$$

となる。

b. 一方の球の中心の運動は，流体中に他方の球のみが存在するときの流れに従うとする場合　一様な軸対称変形流(5)の第１式において，(x, ϖ, φ) の位置に半径 b の球が存在する場合，座標の原点では球の存在のため流速を生じる。その x, ϖ 方向成分を u'_x, u'_ϖ とすれば，これらは x, ϖ, φ における，原点に半径 b の球が存在するときとないときの流速成分の差として与えられる。すなわち(9)より

$$\left.\begin{aligned} u'_x&=\frac{\alpha b^3}{4}x\,\frac{5(x^2+\varpi^2)(2x^2-\varpi^2)-3a^2(2x^2-3\varpi^2)}{(x^2+\varpi^2)^{7/2}}\\ u'_\varpi&=\frac{\alpha b^3}{4}\varpi\,\frac{5(x^2+\varpi^2)(2x^2-\varpi^2)-3a^2(4x^2-\varpi^2)}{(x^2+\varpi^2)^{7/2}}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

したがって両球の相対的な運動の中心線方向成分を u_r とすれば，(9)と(12)より

$$u_r=\frac{\alpha r}{2}\left(1-\frac{5}{2}\frac{a^3+b^3}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{a^5+b^5}{r^5}\right)(2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \tag{13}$$

さらに前と同様一般の変形流に対しては

$$u_r=\frac{r}{2}\left(1-\frac{5}{2}\frac{a^3+b^3}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{a^5+b^5}{r^5}\right)\left\{(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1\right)+\frac{2}{3}(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\theta\cos 2\varphi\right\} \tag{14}$$

となる。

さて，両方の場合を通じて，微小時間 Δt 内に球 a に衝突するような球 b の中心の存在範囲を $Q\Delta t$ とすると

$$Q=\iint_{u_r>0}(u_r)_{r=a+b}\,r\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{15}$$

で与えられることになる。簡単のため $\alpha_2=0$（軸対称変形流れ）と $\alpha_2=-\alpha_1$（一様剪断流）の場合について(15)を計算すると

$$Q=k'\alpha_1(a+b)^3 f(b/a) \tag{16}$$

ここに

$$k' = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}} & (\alpha_2 = 0) \\ 4 & (\alpha_2 = -\alpha_1) \end{cases} \qquad f(b/a) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5}{2}\dfrac{a^3}{(a+b)^3} + \dfrac{3}{2}\dfrac{a^5}{(a+b)^5} & (\text{仮定}(a)) \\ 1 - \dfrac{5}{2}\dfrac{a^3+b^3}{(a+b)^3} + \dfrac{3}{2}\dfrac{a^5+b^5}{(a+b)^5} & (\text{仮定}(b)) \end{cases} \tag{17}$$

(1)で与えられる変形流による，流体の単位質量当りのエネルギー損失をε_0とすると

$$\rho\varepsilon_0 = 2\mu(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$= 3\mu(\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)$$

したがって

$$\alpha_1 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{3\nu}} & (\alpha_2 = 0) \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\nu}} & (\alpha_2 = -\alpha_1) \end{cases}$$

これらを(16)に代入すると

$$\left.\begin{aligned} &Q = \frac{4}{3}k\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\nu}}(a+b)^3 f(b/a) \\ &\text{ただし}\quad k = \begin{cases} \pi/3 = 1.047 & (\alpha_2 = 0) \\ 1 & (\alpha_2 = -\alpha_1) \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

流体の単位体積内に，半径aの球がn_a個，bの球がn_b個あるとすると，単位体積当り単位時間内にaとbの球が衝突する平均回数N_{ab}は，$N_{ab} = Q\,n_a n_b$で与えられる。一様な剪断流$(\alpha_2 = -\alpha_1)$に対するCampの与えた値をN_cとすると

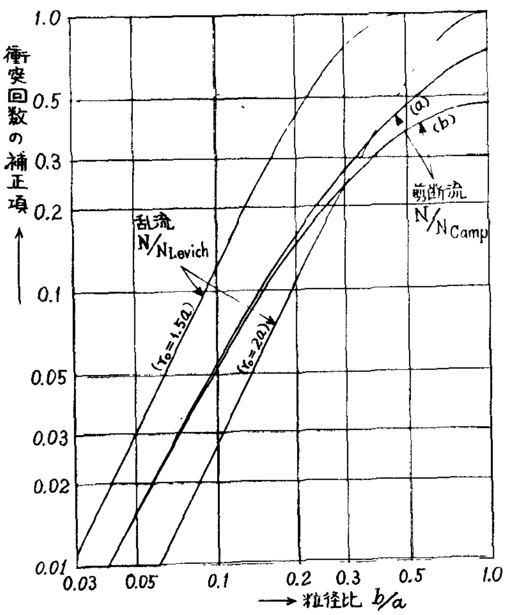

図 1.

$$N_c = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\nu}}(a+b)^3 n_a n_b$$

であるから，$k = 1$とすれば

$$N_{ab}/N_c = f(b/a) \tag{19}$$

となる。これらの関係を図1に示す。

3．乱流中における2球の衝突頻度　Levichの理論において，粒子の存在が乱流場に及ぼす影響を考慮して，球の近傍における拡散係数の修正を試みる。

半径aの球の近傍において、球表面に平行な変動流速成分を表面からの距離$r-a$に比例するとすれば，径方向の変動速度vは$(r-a)^2$に比例することになる。したがって，有効な渦のスケールを$r-a$に比例するとすれば，球の近傍における乱流拡散係数は$(r-a)^3$に比例することになる。この値がある位置$r = r_0$においてLevichの用いた$r < \lambda_0$（λ_0は渦のマイクロスケール）における乱流拡散係数$D = \beta\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\nu}}\lambda^2$に接続するものとすれば，$\lambda = r$と置きかえて，動径方向の乱流拡散係数$D$は

$$D = \begin{cases} \beta\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\nu}}\dfrac{(r-a)^3}{(r_0-a)^3}r_0^2 & r < r_0 \\ \beta\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\nu}}r^2 & r_0 < r < \lambda_0 \\ \alpha\,(\varepsilon_0 r)^{1/3} r & r > \lambda_0 \end{cases} \tag{20}$$

となる。単位体積内の直径bの球の数をnとし，nが球対称の定常拡散式

$$D r^2 \frac{dn}{dr} = \text{const.} \tag{21}$$

に従うものとし，境界条件として$r = a+b$において$n = 0$，$r \to \infty$で$n = n_b$，また$r = r_0$，$r = \lambda_0$においてnおよび$\frac{dn}{dr}$が連続であるとすると，$\lambda_0 \gg r_0, a, b$の条件のもとに

$$\left(\frac{dn}{dr}\right)_{r=a+b}=\frac{r_0-a}{b^3(a+b)^2}\cdot\frac{3r_0^2 n_b}{\dfrac{1}{r_0}+3\left(\dfrac{r_0-a}{a}\right)^3\left\{\dfrac{6r_0^2-9ar_0+2a^2}{2r_0(r_0-a)^2}+\dfrac{a^2-3ab-6b^2}{2b^2(a+b)}+\dfrac{3}{a}\ln\left(\dfrac{a+b}{a}\dfrac{r_0-a}{r_0}\right)\right\}} \tag{22}$$

が得られる。これから衝突半径 $r=a+b$ 上での粒子束を j とすると,

$$j=\left[D\frac{dn}{dr}\right]_{r=a+b}$$

となる。Levich の理論における j の値を j_L とすると, $\lambda_0 \gg a, b$ のとき

$$j_L=3n_b(a+b)\beta\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\nu}} \tag{23}$$

したがって

$$\frac{N_{ab}}{N_L}=\frac{j}{j_L}=\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\frac{r_0^2}{\dfrac{1}{r_0}+3\left(\dfrac{r_0-a}{a}\right)^3\left\{\dfrac{6r_0^2-9ar_0+2a^2}{2r_0(r_0-a)^2}+\dfrac{a^2-3ab-6b^2}{2b^2(a+b)}+\dfrac{3}{a}\ln\left(\dfrac{a+b}{a}\dfrac{r_0-a}{r_0}\right)\right\}} \tag{24}$$

となる。

r_0の値を如何に択ぶかは問題であろうが, 仮に $r_0=2a$, $r_0=1.5a$ としたときの N_{ab}/N_L の値を図1に示す。 $b \ll a$ のときた $N_{ab}/N_L \propto (b/a)^2$ となることは, N_{ab}/N_C と同様である。

4. 考察およびフロック成長の計算例 前節までの計算結果は, 何れもかなり無理な仮定を含むものであるが, 粒径の比 b/a が1にくらべて十分小さいときには, どの場合でも衝突頻度が Camp 又は Levich の計算結果にくらべて $(b/a)^2$ に比例して小さくなることが示される。このことから, 攪拌によるフロックの成長過程において, これまでの理論に従うよりも, 小径の粒子が成長過程から取り残される傾向にあることが想像される。1例として (19) b. の場合の式をもとに, Smoluchowski あるいは丹保氏と同様に, 一様な粒径(1倍粒子)からの成長を計算してみると, 図2のようになる。比較のため丹保氏の計算結果(同径粒子の衝突頻度を同一とした)を図中の点線で示す。計算がフロックの成長の初期

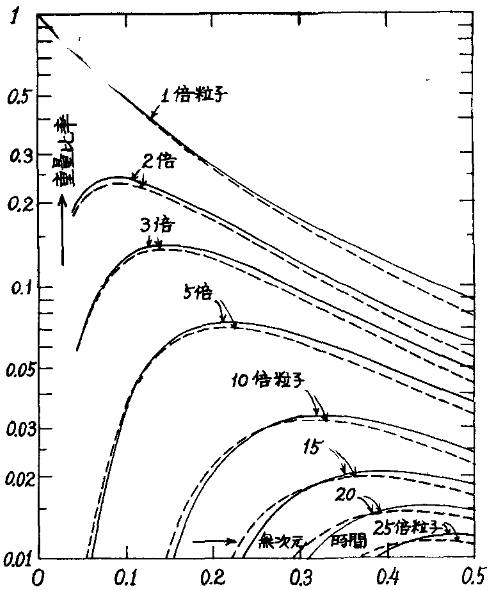

図 2.

の段階しか行われなかったためと, 60倍粒子(粒径で約4倍)で打切ったために, 極めて不十分ではあるが, 小径の粒子が成長過程で取り残されていく傾向が伺われる。実際の成長過程では, 粒径で10^2程度以上の成長をするものであるから, このような傾向はかなり顕著に現れるものと思われる。微粒子の残される問題をこのような考察から行うことは勿論出来ないが, Camp あるいは Levich の理論を適用する場合一考を要する問題と思う。この計算には, 九州大学中央計数施設 OKITAC 5090-H を使用した。

1) T R Camp, Proc ASCE 79 (1953) NO 283

2) V G Levich, Scripta Technica, Inc 英訳: Physicochemical Hydrodynamics

3) M. v Smoluchowski, Z. f. physik. Chemie 92

4) 丹保憲仁, 水道協会誌 第372号 (昭40) 10