

九州大学工学部 正 員 栗谷陽一

九州大学工学部 学生員 楠田哲也

九州大学工学部 桐岡洋子

1 まえがき

第Ⅰ報で浮遊物による水平流沈澱池における密度流について報告した。本報においては流入水と池内の水との間に密度差のある場合についての死水の発生条件などについて一応の結論を得たので以下述べる。

2 懸濁水の密度が大きい場合の簡単な解

沈澱池の内部は死水が生じた場合には、死水部(密度 ρ_c)、上澄水部(密度 ρ_a)、懸濁水部(密度は流入水と等しく ρ_b)の3部に分かれ死水が生じない場合には、上澄水部と懸濁水部の2部に分かれる。流入水の流速(u_0)および懸濁水の濃度は流入水全水深について一様とし、定常状態にあるものとする。懸濁物の容積とその拡散は無視するものとする。また流水口の影響は受けないとする。以上のような仮定の場合懸濁水の密度が、かなり高いと死水が流入口のところまで侵入することがある。図-1のX-X'の両側でエネルギーが保存されるとすると、

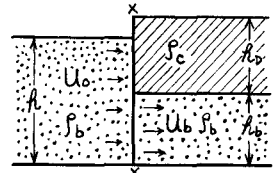


図 - 1

$$\frac{\rho_b}{2g} u_0^2 + \rho_b h = \frac{\rho_b}{2g} u_b^2 + \rho_b h_b + \rho_c h_c$$

$$u_0 h = u_b h_b$$

$$\frac{\rho_b}{2g} u_b^2 = \rho_b (h_b + h_c - h)$$

上式を無次元化し、水表面の上昇を無視すると、

$$(\eta_b - 1)^2 \cdot \eta_b - \frac{1}{K_{bc}} = 0$$

ただし

$$\eta_b = \frac{h_b}{h}, \quad K_{bc} = \frac{\rho_b - \rho_c}{\rho_b} \frac{2gh}{u^2}$$

上式は $K_{bc} < 6.75$ では $0 < \eta_b < 1$ なる解を持たず、 $K_{bc} = 6.75$ では $\eta_b = \frac{1}{3}$ となる。 $K_{bc} > 6.75$ では、 η_b は一般に二根あるが、 $\eta_b > \frac{1}{3}$ なる根のみが実現されると考えられる。

3 基礎式

前報と同様水平流矩形沈澱池の中の流れを2次元流として扱い粘性および乱れの影響を無視する。懸濁物の沈降速度は一樣とする。

水表面に流下方向にX軸鉛直下向にZ軸をとる。流れ関数 ψ を用いて各部分における運動方程式は

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u \gg w, \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}$$

とすると

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad f \text{ は } \rho_a \text{ 或 } \rho_b \quad (1)$$

$$\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z} = g \quad f \text{ は } \rho_a \text{ 或 } \rho_b \text{ 或 } \rho_c \quad (2)$$

これから圧力を消去すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

したがって

と置くと

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{dF(\psi)}{d\psi}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = F(\psi) + \phi(x) \quad (3)$$

ここに $F(\psi)$ および $\phi(x)$ はそれぞれ ψ および x の任意関数である。(3) を流線にそって微分すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{d\phi}{dx}$$

したがって(1)から

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

上式と(2)から

$$\frac{P}{\rho} = gz - \phi(x) \quad \phi = \phi_a + \phi_b \quad (4)$$

(i) 死水部 死水は静止しているものとして水表面の上昇を無視すると(2)から

$$P_0 = \rho_0 gz \quad (5)$$

(ii) 上澄水部 死水のないところの水表面と、死水と上澄水の境界にその流線を $\psi=0$ とすると、

$$(3) \text{ から } \frac{1}{2} u_a(\psi=0) = F(0) + \phi_a(x) \quad \phi_a \text{ は上澄水部での } \phi \quad (6)$$

$\psi=0$ の流線上で、上澄水の流速 $u_a=0$ となったときの圧力 $P_a=0$ とすると、(4)から

$$\frac{P_a}{\rho_a} = gz - \phi_a(x) \quad (7)$$

(6)と(7)から $F(0)=0$ とする。したがって

$$\frac{P_a}{\rho_a} = gz - \frac{1}{2} u_a(\psi=0)^2 \quad (8)$$

さらに流速が小さいものとして水表面の上昇を無視することにより死水のあるところでの $\phi_a(x)$ は、エネルギー保存の関係を用いて、

$$\text{死水のあるところ: } \phi_a(x) = \frac{P_a - P_0}{\rho_a} \rho_0 z_0 \quad z_0 \text{ は死水の深さ} \quad (9-1)$$

死水のないところでは u_a をそのまま用いる。

$$\text{死水のないところ: } \phi_a(x) = \frac{1}{2} u_a^2(\psi=0) \quad (9-2)$$

(iii) 懸濁水部 流入水の速度を u_0 とすると、(3)から懸濁水の流速 u_b は z に無関係になる。さらに、 $x=0, z=0$ で $u_b=u_0$ であるから(4)が、この点で(8)と等しいためには

$$\frac{P_b}{\rho_b} = gz - \frac{1}{2} u_b^2 \quad (10)$$

流れ関数 ψ は $x=0, z=0$ で $\psi=0$ 、 $x=0, z=h$ で $\psi=u_0 h$ であるから

$$\psi = u_0 h - u_b(h-z) \quad (11)$$

(iv) 接続条件 上澄水部と懸濁水部の境界面の水深を z_c とし、懸濁物の沈降速度を ω_0 とすると、 $z=z_c$ で沈降条件から

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z_c}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_z = \omega_0 \quad (12)$$

上式に(11)を代入しさらに x で積分する。そして $x=0$ で、 $z_c=0$ 、 $u_b=u_0$ を考慮すると、

$$u_b = \frac{u_0 h - \omega_0 x}{h - z_c} \quad (13)$$

上式と(11)から $z=z_c$ で $\psi=\psi_c$ として

$$\psi_c = \omega_0 x \quad (14)$$

圧力の連続条件を求める。 $Z=Z_c$ で、(7), (9-1), (9-2), (10), (13) を用いて $p_a=p_b$ とおくと $f_a/f_b=1$ と、

$$\text{死水のあるところ: } (p_b - p_c) \frac{Z_D}{h} = -(p_b - p_a) \frac{Z_c}{h} + \frac{p_b}{2g} \frac{u_0^2}{h} \left\{ \frac{1 - \frac{u_0 x}{Z_c h}}{1 - \frac{Z_c}{h}} \right\}^2 \quad (15-1)$$

$$\text{死水の無いところ: } (p_b - p_a) \frac{Z_c}{h} = \frac{p_b}{2gh} (u_b^2 - u_a^2, \psi=0). \quad (15-2)$$

(休) 方程式化 $Z=Z_c$, すなわち $\psi=\psi_c$ では $u_a=u_b$ である。したがって (3), (13) から

$$\phi(x) = -F(\psi_c) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_0 h - u_0 x}{h - Z_c} \right\}^2. \quad (16)$$

(7), (9-1), (9-2), (15-1), (15-2), (16) から死水のあるところとないところの両方で

$$\frac{Z_c}{h} = \frac{F(\psi_c)}{\frac{p_b - p_c}{p_b} gh} \quad (17)$$

(3) で $\psi=\psi_c$ とおくと積分定数を考慮して

$$\text{死水のあるところ: } Z_c - Z_D = \int_0^{\psi_c} \left\{ 2(F(\psi) + \phi(x)) \right\}^{-1/2} d\psi \quad (18-1)$$

$$\text{死水の無いところ: } Z_c = \int_0^{\psi_c} \left\{ 2(F(\psi) + \phi(x)) \right\}^{-1/2} d\psi \quad (18-2)$$

(18-1), (18-2) に (14), (16), (17) を用いると

$$\text{死水のあるところ: } Z_c - Z_D = \int_0^{\psi_c} \left[\left(\frac{u_0 h - \psi_c}{h - \frac{F(\psi_c)}{\frac{p_b - p_c}{p_b} gh}} \right)^2 - 2 \{ F(\psi_c) - F(\psi) \} \right]^{-1/2} d\psi \quad (19-1)$$

$$\text{死水の無いところ: } Z_c = \int_0^{\psi_c} \left[\left(\frac{u_0 h - \psi_c}{h - \frac{F(\psi_c)}{\frac{p_b - p_c}{p_b} gh}} \right)^2 - 2 \{ F(\psi_c) - F(\psi) \} \right]^{-1/2} d\psi \quad (19-2)$$

(15-1), (17), (19-1), (19-2) を無次元化し整理すると

$$\text{死水のあるところ: } \zeta_c \left(1 + \frac{K_{ba}}{K_{ac}} \right) + \frac{1}{K_{ac}} \left\{ \frac{1 - \zeta_c}{1 - \zeta_c} \right\}^2 = \int_0^{\xi_c} \left\{ \left(\frac{1 - \xi_c}{1 - \xi_c} \right)^2 - K_{ba} (\zeta_c - \xi) \right\}^{-1/2} d\xi \quad (20-1-1)$$

$$\eta_D = -\frac{K_{ba}}{K_{ac}} \zeta_c + \frac{1}{K_{ac}} \left\{ \frac{1 - \zeta_c}{1 - \zeta_c} \right\}^2 \quad (20-1-2)$$

$$\text{死水の無いところ: } \zeta_c = \int_0^{\xi_c} \left\{ \left(\frac{1 - \xi_c}{1 - \zeta_c} \right)^2 - K_{ba} (\zeta_c - \xi) \right\}^{-1/2} d\xi \quad (20-2)$$

ただし $\eta_D = \frac{Z_D}{h}$, $\xi = \frac{\psi}{u_0 h}$, $\xi_c = \frac{\psi_c}{u_0 h} = \frac{u_0 x}{u_0 h}$, $\zeta = \frac{F(\psi)}{E_{ba} gh}$, $\zeta_c = \frac{F(\psi_c)}{E_{ba} gh} = \frac{Z_c}{h}$,
 $K_{ba} = \frac{2E_{ba} gh}{u_0^2}$, $K_{ac} = \frac{2E_{ac} gh}{u_0^2}$, $E_{ba} = \frac{p_b - p_c}{p_b}$, $E_{ac} = \frac{p_a - p_c}{p_a}$.

4 死水の発生

死水発生後の $u_a(\psi=0)$ は、(7), (8), (9-1) から

$$\frac{u_a^2}{2} = \frac{p_a - p_c}{p_a} gh Z_D$$

すなわち

$$\eta_D = \frac{1}{K_{ac}} u_a^2(\psi=0) \quad \text{ここに, } u_a = \frac{u_0}{u_0} \quad (21)$$

上式と (20-1-2) から

$$u_a^2 = -K_{ba} \zeta_c + \left\{ \frac{1 - \zeta_c}{1 - \zeta_c} \right\}^2. \quad (22)$$

したがって死水が連続的に生ずるならば、 $u_a=0$ すなわち

$$f = -K_{ba} \zeta_c + \left\{ \frac{1 - \zeta_c}{1 - \zeta_c} \right\}^2 = 0.$$

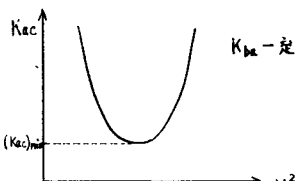
死水が連続的に生ずるものとすれば、(20-1-1), (20-1-2), (20-2) により死水の水深のみが ζ_c の影響を受け、死水発生点は前報(本報において $p_c=p_a$ としたもの)の場合と同様となり、死水の発生については K_{ac} に影響されないという矛盾を生ずる。したがって(20)を用いて池内の水流を計算する場合、常

に死水発生の可能性の有無を調べながら積分を進めなければならない。すなわち、前報において死水が連続的に生じた場合($K_{ba} = 3.1 \sim 3.7$)においても死水が不連続的に生ずることになる。

死水の発生の有無と、 K_{ba} , K_{ac} との関係については、 $\xi = 1$ で死水存在の可能性を調べるだけで充分である。(20-1-1), (20-1-2)において(22)を用い $\xi_c = 1$, $\xi_c = 1$ とおく

$$1 - \eta_D = \int_0^1 \{U_a^2 + K_{ba}\xi\}^{-1/2} d\xi \tag{23}$$

$$U_a^2 = K_{ac} \eta_D \tag{24}$$



上式を、 K_{ba} を与え、前報での(ξ_c, ξ_c)すなわち(ξ, ξ)の結果を使って U_a を逐次変化しながら積分すると、 K_{ac} と U_a^2 の関係が図-2 のように求まりこの K_{ac} の最小値で死水が発生しうる。

5 計算結果

(23)(24)の計算結果と §2 で述べたことから、死水発生と K_{ac}, K_{ba} の関係およびこのときの K_{ac} に対応する死水の水深 η_D を図-3に示した。

図-4は(20-1-1), (20-1-2), (20-2)の計算結果の一般図である。 ξ のある値(0のこともある)まで(20-2)を用いて求めることができ、この点で死水発生の可能性が生ずると(20-1), (20-1-2)を満足する値にまで不連続が生じて降下する。そしてそれ以降はエネルギーが保存されているとして、(20-1-1), (20-1-2)を進めて行けばこのような死水の形状などを求めることもできる。

6 考察

死水部と上澄水部に密度差のない場合には、 $K_{ba} < 3.4$ で死水が生じなかったが、両者に密度差のある場合には K_{ac} の値によって死水が発生する可能性がでてきた。

7 むすび

本計算は理想流体として行ったので死水部と上澄水部との間に速度の不連続が生じることとなり流速の遅い時は問題となる。

本論文の計算には、九州大学中央計数施設の OKITAC-5090-H電子計算機を使用した。

参考文献

① 梶谷陽一：水平流泥澱池における密度流と死水領域の発生機構について 日本学術会議西部支部昭和44年度研究発表会論文集 または

② 梶谷陽一：水平流泥澱池における浮遊物による密度流と死水 日本学術会議西部支部昭和44年度研究発表会論文集

③ 梶谷陽一：水平流泥澱池における密度流と死水領域の発生機構について 日本学術会議西部支部昭和44年度研究発表会論文集

